

Universität der Bundeswehr München
Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen
Institut für Statik und Mechanik

Ein Beitrag zur Herleitung und Lösung
nichtlinearer, thermomechanisch gekoppelter
Grundgleichungen für Schalentragwerke

S.Paulke

Die vorliegende Schrift ist eine von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität der Bundeswehr München genehmigte Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

Vorsitzender des Promotionsausschusses: Univ.-Prof. Dr.-Ing. I. Mangerig

1. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. A. H. Heinen
2. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. F. A. Emmerling

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Februar 2002

Neubiberg, den 15. November 2002

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	5
Einleitung	11
1 Allgemeine thermodynamische Zusammenhänge	17
1.1 Grundbegriffe der Thermodynamik	17
1.2 Der 1.Hauptsatz der Thermodynamik	27
1.2.1 Energiezufuhr durch Arbeit	30
1.2.2 Energiezufuhr durch Wärme	31
1.3 Der 2.Hauptsatz der Thermodynamik	33
1.3.1 Reversible und irreversible Prozesse	33
1.3.2 Allgemeine Formulierungen des 2.Hauptsatzes	35
1.3.2.1 Formulierungen für abgeschlossene Systeme	35
1.3.2.2 Formulierungen für geschlossene Systeme	37
1.3.3 Zur Theorie linearer phänomenologischer Verknüpfungen zwis- chen 'thermodynamischen Kräften' und 'Strömen'	39
1.4 Die Formen der Wärmeübertragung	40
1.4.1 Wärmeleitung	41
1.4.2 Konvektiver Wärmeübergang	42
1.4.3 Wärmestrahlung	44
2 Die Grundgleichungen der Thermomechanik	47
2.1 Die Anwendung des 1.Hauptsatzes auf ein Volumenelement	49
2.1.1 Energiezufuhr durch Arbeit	49
2.1.2 Energiezufuhr durch Wärme	51
2.1.3 Innere und äußere Energie	53
2.1.4 Erhaltungsgleichungen der Thermomechanik	55

2.2	Die Anwendung des 2.Hauptsatzes auf ein Volumenelement	59
2.2.1	Gibbsche Fundamentalgleichung, Zustandsgleichungen	62
2.2.2	Thermomechanisch konsistente Stoffgesetze zur Beschreibung irreversibler Phänomene	67
2.2.2.1	Stoffgesetze für Wärmeleitung	67
2.2.2.2	Stoffgesetze für plastische Deformationen	68
2.2.3	Zusammenfassung: Stoffgesetze für thermo-elasto-plastisches Materialverhalten und die gekoppelte Wärmeleitgleichung	73
3	Die Anwendung der thermoelastischen Grundgleichungen auf dünnwandige Flächentragwerke	77
3.1	Die Normalenhypothese von Kirchhoff-Love	79
3.2	Die Bewegungsgleichungen	81
3.3	Die konstitutiven Gleichungen für die Schnittgrößen	83
3.3.1	Verformungsbedingte Anteile	86
3.3.2	Temperaturbedingte Anteile	89
3.3.3	Nachweis der Energiekonsistenz	92
3.4	Die Anwendung der gekoppelten Wärmeleitgleichung auf Schalentragwerke	96
4	Die Lösung des gekoppelten thermoelastischen Problems	99
4.1	Das gekoppelte Differenzialgleichungssystem im Gebiet	99
4.1.1	Anmerkungen zu Nichtlinearitäten	101
4.2	Die mechanischen Randbedingungen	103
4.2.1	Geometrische Randbedingungen	104
4.2.2	Dynamische Randbedingungen	105
4.3	Die thermischen Randbedingungen	108
4.4	Die Abspaltung des quasistatischen Problems	114
4.5	Lösung der dynamischen Bewegungsgleichungen mittels des Prinzips der virtuellen Verrückung	119
4.6	Lösung der dynamischen Wärmeleitgleichung	123
5	Die Formulierung einer kinetischen Stabilitätstheorie für thermomechanisch beanspruchte Flächentragwerke	132
5.1	Die Stabilitätstheorie ohne Beachtung der Kopplung	133
5.2	Die Stabilitätstheorie mit Beachtung der Kopplung	138

6	Erläuterungen zu den numerischen Berechnungen	145
7	Berechnungsbeispiele	149
7.1	Platte unter bereichsweisem Temperaturschock (BB1)	149
7.1.1	Diskussion der Ergebnisse	154
7.2	Zylinder unter schockartiger Druckbeanspruchung an der Innenwand (BB2)	157
7.2.1	Diskussion der Ergebnisse und Entwicklung eines vereinfachten Berechnungsverfahrens zur Bestimmung kopplungsbedingter Temperaturänderungen in der Schale	160
7.3	Ein kinetisches Stabilitätsproblem: Thermisch erregte Plattenschwingungen (BB3)	166
7.3.1	Diskussion der Ergebnisse	174
	Schlussbemerkungen und Ausblick	177
A	Nachweis der Symmetrie des Spannungstensors	179
B	Formelzusammenstellung für die Schalentheorie	181
C	Zur Berechnung eindimensionaler Temperatureigenformen	186
D	Zur Berechnung zweidimensionaler Temperatureigenformen mittels der FEM	190
E	Stoffgesetze für Wärmeströme, abgeleitet aus dem Fourierschen Gesetz der Wärmeleitung	195
F	Aufbau der Koeffizientenmatrizen X_T und X_{2T}	197
G	Zu den Berechnungsbeispielen	199

Symbolverzeichnis

Hier werden die wichtigsten Bezeichnungen der vorliegenden Arbeit zusammengestellt. Im Folgenden ist zu beachten:

- Vektoren sowie Matrizen (in symbolischer Darstellung) werden fett gedruckt.
- Bei Größen mit kleinen lateinischen Indizes können diese die Ziffern 1,2,3 annehmen. So steht die Größe \mathbf{g}_k für die Basisvektoren $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$.
- Bei Größen mit kleinen griechischen Indizes können diese die Ziffern 1,2 annehmen. So steht die Größe $n^{\alpha\beta}$ für die Membrankomponenten $n^{11}, n^{12}, n^{21}, n^{22}$.

Koordinatensysteme:

x^1, x^2, x^3	kartesische Koordinaten des Bezugssystems (Ursprung 0)
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	zugehörige orthonormierte Basis
$\theta^1, \theta^2, \theta^3$	krummlinige Koordinaten bezogen auf die Referenzgeometrie (im unverformten Ausgangszustand)

Ortsmarkierungen¹:

$\overset{+}{(\dots)}$	unverformter Ausgangszustand
$\overset{o}{(\dots)}$	Grundzustand
$\overset{-}{(\dots)}$	Nachbarzustand

Die Größen des Momentanzustandes werden aufgespalten in

$\overset{\vee}{(\dots)}$	quasistatische Anteile
$\overset{\sim}{(\dots)}$	dynamische Anteile

Ableitungen:

$(\dots)_{,k} = \frac{\partial}{\partial \theta^k}(\dots)$	partielle Ableitungen nach θ^k
$(\dots) _k$	kovariante Ableitungen nach θ^k (bezüglich Ausgangskonfiguration)
$\overset{\bullet}{(\dots)} = \frac{D}{Dt}(\dots)$	Zeitableitungen

In Verbindung mit thermischen Randbedingungen bei Schalen bezeichnet

$(\dots)_{(o)}$	vorgegebene Größen der oberen Laibungsfläche
$(\dots)_{(u)}$	vorgegebene Größen der unteren Laibungsfläche
$(\dots)_{(s)}$	vorgegebene Größen an den Randflächen der Schale

¹Größen des Momentanzustandes - sowie Störgrößen in Kapitel 5 - erhalten keine Ortsmarkierung!

Weitere Markierungen:

$(\hat{\dots})$	Zustandsfunktionen
(\dots)	Größen des Momentanzustandes nach überlagerter Starrkörperbewegung
$\frac{(\dots)}{T}$	temperaturbedingte Anteile in den Schnittgrößen der Mittelfläche
$(\dots)^*$	verformungsbedingte Anteile in den Schnittgrößen der Mittelfläche
$(\dots)^{RE}$	reversible Anteile
$(\dots)^{IR}$	irreversible Anteile
$(\dots)^{virt}$	virtuelle Größen

Energie- und Entropiegrößen:

E	Energie
E_{kin}	kinetische Energie
E_{pot}	potenzielle Energie
U	innere Energie
u	spezifische innere Energie
W	Arbeit
\mathcal{W}	Formänderungsarbeit
	($\dot{\mathcal{W}}$... Formänderungsleistung; \dot{w} ... spezifische Formänderungsleistung)
Q	Wärme
\mathbf{q}	Wärmestromvektor (Betrag: q)
S	Entropie (\dot{S}^{RE} ... Entropieströmung; \dot{S}^{IR} ... Entropieproduktion)
s	spezifische Entropie
	(bezeichnet in der Schalentheorie auch die Koordinate der Randkurve)
F	freie Energie
f	spezifische freie Energie
Ψ	Dissipationsenergie
ψ	spezifische Dissipationsenergie

Stoffkonstanten²:

λ	Wärmeleitfähigkeit
α	Wärmeübergangskoeffizient
ν	Querkontraktionszahl
E	Elastizitätsmodul
G	Gleitmodul ($G = \frac{E}{2(1+\nu)}$)
α_T	Wärmeausdehnungskoeffizient = Längenausdehnungskoeffizient
γ	$= 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T$
γ^*	$= 2G \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T = \frac{E \alpha_T}{1-\nu}$
c	spezifische Wärmekapazität

Allgemeine Bezeichnungen³:

Q	materieller Punkt des Kontinuums
P	materieller Punkt der Mittelfläche
\mathbf{R}	Ortsvektor zum materiellen Punkt Q
\mathbf{r}	Ortsvektor zum materiellen Punkt P
\mathbf{w}	Verschiebungsvektor von materiellen Punkten Q des Kontinuums
w^k	Komponenten von \mathbf{w}
\mathbf{v}	Verschiebungsvektor von materiellen Punkten P der Schalenmittelfläche
v^k	Komponenten von \mathbf{v}
$\delta \mathbf{v}$	virtuelle Verschiebung der Mittelfläche ($\delta \mathbf{v} = \mathbf{v}^{virt}$)
$\delta \boldsymbol{\varphi}$	virtuelle Verdrehung der Mittelfläche ($\delta \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^{virt}$)
\mathbf{g}_k	kovariante Basisvektoren in einem materiellen Punkt Q des Kontinuums
\mathbf{a}_k	kovariante Basisvektoren in einem materiellen Punkt P der Mittelfläche
g_{ik}	Metriktensor im Kontinuum
a_{ik}	Metriktensor der Mittelfläche

²Praktisch alle der hier aufgeführten Größen hängen strenggenommen von der Temperatur ab und dürfen eigentlich auch nicht als Stoffkonstante bezeichnet werden. Im Rahmen einer ingenieurmäßigen Betrachtungsweise können sie jedoch - wie in der vorliegenden Arbeit - innerhalb eines bestimmten Temperaturintervalls als näherungsweise konstant angesehen werden.

³Für Größen, die für unterschiedliche Zustände existieren, sind hier stellvertretend diejenigen des Momentanzustandes aufgeführt.

g	Determinante von g_{ik}
a	Determinante von a_{ik}
h^k	Wärmeströme
h	Wärmequelle (in der Schalentheorie bezeichnet h auch die Schalendicke)
ρ	Massendichte
m	Masse (in der Schalentheorie bezeichnet $\overset{+}{m}$ die Massenbelegung der Mittelfläche)
V	Volumen
A	Mittelfläche
T_0	Temperatur im Ausgangszustand
T	Temperatur im Momentanzustand
G^k	massenbezogene Komponenten einer inneren Volumenkraft
τ^{ik}	2.Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
Γ_{ik}	Greenscher Verzerrungstensor (ab Kapitel 4 der elastische Verzerrungstensor)
I	1.Invariante des elastischen Verzerrungstensors
E^{ikrs}	Elastizitätstensor (Kontinuum)
$G^{\alpha\beta\rho\lambda}$	Elastizitätstensor (Mittelfläche)

Es folgen ausschließlich allgemeine Bezeichnungen der Schalentheorie...

b_β^α	Krümmungstensor
H, K	Mittlere und Gaußsche Krümmung
$\delta_k^i, \delta_\beta^\alpha$	Kronecker-Delta
μ_β^α	Shifter
μ	Determinante von μ_β^α
ν_β^α	Transformationskoeffizienten (Kehrmatrix des Shifters)
$\mathbf{n}^\alpha, \mathbf{m}^\alpha$	Schnittkraft- und Momentenvektoren
$s^{\alpha\beta}$	symmetrische Schnittgröße
$n^{\alpha\beta}$	Membrankräfte
$n^{\alpha 3}$	Querkräfte
$m^{\alpha\beta}$	Biege- und Drillmomente

\mathbf{p}	Lastvektor der Mittelfläche (flächenbezogen)
p^k	Komponenten von \mathbf{p}
\mathbf{K}_T	Trägheitskraftvektor
K_T^k	Komponenten von \mathbf{K}_T
\mathbf{M}_T	Trägheitsmomentenvektor
M_T^k	Komponenten von \mathbf{M}_T
Φ_i^m	Deformationskoeffizienten (zur Transformation der Basisvektoren)
$\epsilon_{\alpha\beta}$	Permutationstensor
B	Biegesteifigkeit ($B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$)
D	Dehnsteifigkeit ($D = \frac{Eh}{1-\nu^2}$)
$\gamma_{\alpha\beta}$	Verzerrungen der Mittelfläche
$\kappa_{\alpha\beta}$	Krümmungsänderungen
$\Delta T^0, \Delta T^1, \Delta T^2$	konstitutive thermische Variable (allgemein: ΔT^n)
\mathbf{t}	Tangentenvektor am Schalenrand
t^α	Komponenten von \mathbf{t}
\mathbf{n}	Nomaleneinheitsvektor am Schalenrand
n_β	Komponenten von \mathbf{n}
$\mathbf{n}_{(e)}$	eingepägter Kraftvektor am Schalenrand
$T_{(e)}, N_{(e)}, A_{(e)}$	Komponenten von $\mathbf{n}_{(e)}$
$\mathbf{n}_{(a)}$	Auflagerkraftvektor am Schalenrand
$T_{(a)}, N_{(a)}, A_{(a)}$	Komponenten von $\mathbf{n}_{(a)}$
$\mathbf{m}_{(e)}$	eingepägter Momentenvektor am Schalenrand
$M_{(e)}, B_{(e)}$	Komponenten von $\mathbf{m}_{(e)}$
$\mathbf{m}_{(a)}$	Auflagermomentenvektor am Schalenrand
$M_{(a)}, B_{(a)}$	Komponenten von $\mathbf{m}_{(a)}$
\mathbf{N}	Normaleneinheitsvektor auf den Begrenzungsflächen des Schalenkontinuums
N^k	Komponenten von \mathbf{N}

Eigenformen und die ihnen zugeordneten Größen:

$\overset{n}{v}^k(\theta^\alpha)$	Verschiebungskomponenten der n-ten Eigenschwingform
$\overset{n}{\omega}$	Eigenkreisfrequenzen
$\overset{n}{h}(t)$	die zu $\overset{n}{v}^k(\theta^\alpha)$ gehörende (unbekannte) Zeitfunktion
$\overset{n}{\vartheta}(\theta^\alpha)$	zweidimensionale Temperatureigenformen der Mittelfläche
$\overset{m}{\tau}(\theta^3)$	eindimensionale Temperatureigenformen in Dickenrichtung
$\overset{l}{T}(\theta^k)$	dreidimensionale Temperatureigenformen im Schalenkontinuum
$\overset{l}{f}(t)$	die zu $\overset{l}{T}(\theta^k)$ gehörende (unbekannte) Zeitfunktion
$\overset{l}{h}^k(\theta^r)$	die zu $\overset{l}{T}(\theta^k)$ gehörenden Wärmeströme
$\overset{r}{I}^l$	Wert der Randintegration bei Konvektionsrandbedingungen (aus der 'Überlagerung' der r -ten mit der l -ten Temperatureigenform)

Zusätzliche Markierungen in Kapitel 5:

$\left(\begin{smallmatrix} \dots \\ L \end{smallmatrix}\right)$	linear in den Störgrößen
$\left(\begin{smallmatrix} \dots \\ G \end{smallmatrix}\right)$	enthält Störgrößen gekoppelt mit Verformungen des Grundzustandes
$\left(\begin{smallmatrix} \dots \\ N \end{smallmatrix}\right)$	nichtlinear in den Störgrößen

Weitere Bezeichnungen treten selten auf und werden unmittelbar im Text erklärt.

Abkürzungen in Text und Bildern:

BB	Berechnungsbeispiel
dim.	dimensional
FEM	Finite-Element-Methode
K	Kelvin
konst.	konstant
max.	maximal
L.	Linie
PvV	Prinzip der virtuellen Verrückung
RB	Randbedingung
vorgeg.	vorgegeben

Einleitung

Einführend macht es Sinn, auf die praktische Relevanz sowie den Inhalt der vorliegenden Arbeit einzugehen. Zunächst werden thermische Beanspruchungen im Ingenieurwesen behandelt.

Praktisch jedes Tragwerk ist im Gebrauchszustand Temperaturänderungen ausgesetzt. In erster Linie seien tages- und jahreszeitlich bedingte Temperaturschwankungen genannt. Hinzu kommen die aus der spezifischen Nutzung eines Tragwerks resultierenden thermischen Beanspruchungen, wenn beispielsweise in industriellen Anlagen heiße Gase oder Flüssigkeiten in Rohre oder Behälter strömen, oder wenn in Verbrennungskammern von Kraftwerken oder Motoren hohe Temperaturen auftreten, die mitunter starken zeitlichen Schwankungen unterworfen sein können. Insbesondere im Bauingenieurwesen muss auch mit der außergewöhnlichen (Temperatur-) Belastung im Brandfall gerechnet werden, wobei es maßgeblich darum geht, zu gewährleisten, dass die Tragfähigkeit von Gebäuden - zumindest über einen begrenzten Zeitraum, der für Rettungsmaßnahmen notwendig ist - erhalten bleibt.

Hohe thermische Lasten sind vor allem in der Luft- und Raumfahrttechnik zu beachten, wo eine Verbesserung des Wirkungsgrades von Gasturbinen heute gerade davon abhängt, dass extreme Temperaturdifferenzen realisiert werden. Des Weiteren sei auf die aerodynamische Erwärmung der Außenhaut von Flugzeugen und Raketen hingewiesen, die bei Fluggeschwindigkeiten im Überschallbereich auftritt, siehe Abbildung 1. Viele der oben genannten Phänomene thermischer Beanspruchung treten gerade bei dünnwandigen Strukturen, also z.B. bei Schalenträgwerken auf: Behälter für Flüssigkeiten und Gase, Rohre, Turbinenschaufeln usw.

Aber weshalb wird das Tragverhalten solcher Strukturen durch Temperaturänderungen beeinflusst? Warum führen in der Realität Änderungen der Temperatur immer zu Spannungs- und Verformungsänderungen in Tragwerken? Der Grund hierfür liegt in der Ausdehnung eines jeden Werkstoffes mit zunehmender Temperatur. Zahlenmäßig wird das Verhältnis zwischen Ausdehnung und Temperaturänderung mit dem Wärmeausdehnungskoeffizient⁴ α_T erfasst. Die Ausdehnung allein zieht aber noch keine zusätzlichen Kräfte und Spannungen in Tragwerken nach sich. Diese treten erst dann auf, wenn die thermische Ausdehnung - mehr oder weniger - behindert wird, was in der Praxis fast immer der Fall ist. Eine solche Behinderung kann die Ausdehnung eines gesamten Bauteils betreffen, wenn z.B. ein Rohr beidseitig unver-

⁴Er wird auch häufig als Längenausdehnungskoeffizient bezeichnet, siehe [43].

schieblich gelagert ist; sie kann aber auch örtlich begrenzt auftreten, wenn Zwängungen vorliegen oder die Temperaturfelder ungleichmäßig sind. So können während und nach dem Schweißen - örtlich begrenzt - extreme Spannungsspitzen auftreten, die, wenn sie nicht abgebaut werden, Ausgangspunkte bei Rissbildung sein können. Um industrielle Schweißvorgänge zu optimieren - also Rissbildung ('hot crack') und Spannungsspitzen zu minimieren - ist ein fundiertes Wissen über Thermomechanik und insbesondere thermische Randbedingungen (Konvektion) notwendig⁵.

Thermoelastische Instabilitätserscheinungen können auftreten, wenn bei veränderter Ausdehnung hohe Drücke bzw. Normalkräfte entstehen. Dann können Tragwerke unter thermischer Beanspruchung schlagartig nachgeben, wobei mit großen Verformungen zu rechnen ist, und Tragstrukturen zerstört werden. In der Literatur (z.B. [2], [21], [32], [50], [84], [70], [71]) werden eine ganze Reihe thermoelastischer Stabilitätsprobleme untersucht. Als besonders praxisrelevante Beispiele seien in diesem Zusammenhang genannt:

- Untersuchungen von Ziegler und Ramersdorfer in [32], wo unter anderem Instabilitätserscheinungen bei Pipelines analysiert werden, die von einer heißen Flüssigkeit durchströmt werden.
- Instabilitätserscheinungen bei Scheibenbremsen (siehe [84]), hervorgerufen durch eine reibungsbedingte Erwärmung der Bremscheiben.
- Lokale Instabilitäten von Flügelstrukturen infolge aerodynamischer Erwärmung ([2] und [16]), siehe Abbildung 1.

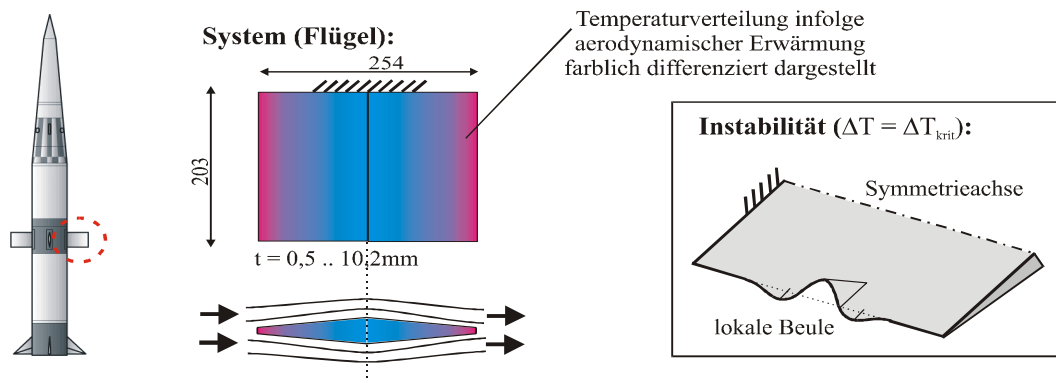


Abbildung 1: Raketenflügel aus [2] und [16]

Ändern sich die Temperaturen sehr schnell, wie bei dem Berechnungsbeispiel in Abschnitt 7.3, so kommt eine kinetische Stabilitätstheorie zum Einsatz, wie sie in Kapitel 5 für Schalenträgerwerke formuliert wird. Ihre Anwendung auf die hier aufgelisteten (statischen) Stabilitätsprobleme gelingt problemlos. In Zusammenhang mit aerodynamischen Erwärmungsproblemen kann der Einsatz einer kinetischen Stabilitätstheorie sinnvoll

⁵Siehe Beitrag von L.Karlsson in [31] und [81].

sein (siehe [16]), wenn Steifigkeitsverluste, die kurz vor Erreichen einer kritischen thermischen Beanspruchung auftreten, berechnet werden sollen. Solche Steifigkeitsverluste können in der Realität zu Flatterschwingungen führen.

Neben dem Phänomen, dass infolge thermischer Ausdehnung und deren Behinderung zusätzliche Spannungen in Tragwerken auftreten, müssen unter Umständen aber auch noch andere Auswirkungen von Temperaturänderungen beachtet werden: So führen diese auch zu einer Änderung der Materialkennwerte (z.B. Elastizitätsmodul, Fließgrenze), wodurch das Tragverhalten indirekt beeinflusst wird. Solche Effekte, auf die z.B. in [72] eingegangen wird, werden in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht beachtet; es wird näherungsweise angenommen, dass die Materialkennwerte Stoffkonstante sind, sich innerhalb der untersuchten Temperaturspanne also nicht ändern.

Wir haben gesehen, dass Temperaturänderungen in der Regel auf mechanische Größen wie Spannungen und Verformungen Einfluss haben und mitunter auch zu Instabilitäten führen können. Der umgekehrte Fall, dass Deformationen Temperaturänderungen bewirken (man spricht in diesem Zusammenhang von der thermomechanischen Kopplung), ist ebenso möglich, worauf im Folgenden noch eingegangen wird.

Zuvor soll das Gebiet der Thermomechanik kurz umrissen werden. Unter Thermomechanik verstehen wir die Verknüpfung der Themengebiete Kontinuumsmechanik und Thermodynamik. In der Kontinuumsmechanik interessiert man sich für die Mechanik deformierbarer Körper; unter Vernachlässigung der atomistischen Struktur der Materie werden die auf den Newtonschen Axiomen basierenden Erhaltungsgleichungen für Raumbereiche (Volumenelemente) formuliert. In diesem Zusammenhang werden Spannungs- und Verzerrungsmaße eingeführt. Hinzu kommen Stoffgesetze, mit denen das - z.B. elastische oder plastische - Materialverhalten realer Werkstoffe formelmäßig abgebildet wird. In Anlehnung an einen Vorschlag von Krätzig [42] werden hier die Erhaltungsgleichungen aus Schlussfolgerungen abgeleitet, die sich aus dem ersten Hauptsatz ziehen lassen. Wie in Abschnitt 2.1.4 gezeigt, ist dieser Weg zwar recht aufwendig, zeigt aber eindrucksvoll die übergeordnete Stellung der Thermodynamik.

Die Thermodynamik, die ihr Augenmerk insbesondere auf thermische Energieformen (Wärme) richtet, umfasst heute die allgemeine Energie- und Zustandslehre⁶. Ihre 'Grundpfeiler' sind die thermodynamischen Hauptsätze: Während der erste die Energieerhaltung beinhaltet, die die Umwandlung unterschiedlicher Energieformen 'regelt', macht der zweite Aussagen über die 'Richtung', in der irreversible Prozesse ablaufen müssen. Stoffgesetze der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie wollen wir hier als Zustandsfunktionen⁷ auffassen, und uns bei deren Formulierung übergeordnete Prinzipien und Gesetzmäßigkeiten der Thermodynamik zunutze machen. In diesem Zusammenhang sei insbesondere auf die *Thermodynamik irreversibler Prozesse* hingewiesen, die sich mit Nichtgleichgewichtszuständen - wie sie bei Wärmeleitung und plastischen Deformationen charakteristisch sind - befasst. Viskose Effekte werden in der vorliegenden Arbeit nicht berücksichtigt.

⁶Siehe [66].

⁷Siehe Abschnitt 1.1.

Letztendlich ergibt die Verknüpfung von kontinuumsmechanischen und thermodynamischen Überlegungen die Wärmeleitgleichung (2.91). Abweichend zu üblichen Formulierungen, wie sie im Rahmen instationärer Berechnungen in der Bauphysik [47] bekannt sind, enthält die Wärmeleitgleichung hier elastische und plastische Kopplungsterme. Das heißt, Verformungen in Kontinua bewirken Änderungen der Temperaturfelder. Da - wie oben erläutert - daraus wieder Rückwirkungen auf Spannungs- und Verformungsfelder resultieren, ist es einsichtig, dass wegen der thermomechanischen Kopplung Temperatur- und Verformungsfelder nicht mehr getrennt voneinander berechnet werden können.

Da wir in der Schalentheorie plastische - also bleibende - Verformungen nicht beachten wollen, verbleibt dann lediglich der elastische Kopplungsterm in der Wärmeleitgleichung. Ziel ist es in den Berechnungsbeispielen in Kapitel 7 die Auswirkungen dieses Kopplungsterms, der bei konkreten Berechnungen üblicherweise vernachlässigt wird, genauer zu untersuchen. Meines Wissens ist die Berücksichtigung des elastischen Kopplungsterms in heutigen kommerziellen FEM-Programmsystemen nicht möglich, weshalb die hier erzielten Berechnungsergebnisse mit eigens hierfür entwickelten Programmen berechnet werden.

Ausgehend von eher theoretischen Betrachtungen in Kapitel 1 und 2, wo wir uns mit Thermodynamik und deren Anwendung auf die Kontinuumsmechanik befassen, wird im zweiten Teil der Arbeit - aufbauend auf den zuvor ermittelten Grundgleichungen - eine thermoelastische Theorie für beliebig gekrümmte Schalen mit Lösungsverfahren und Anwendungsbeispielen entwickelt. Diese vielseitig einsetzbare Theorie basiert auf der Normalenhypothese von Kirchhoff-Love, die sich bei dünnwandigen Schalenträgwerken bewährt. Die hier formulierte thermoelastische Schalentheorie folgt in ihrer Darstellung der Arbeit [12], in der jedoch der Temperatureinfluss nicht betrachtet wird. Wie in [12], so werden auch hier geometrische Nichtlinearitäten in den Schalengleichungen - die im Tensorkalkül formuliert werden - konsequent berücksichtigt. In Kapitel 5 wird dann eine kinetischen Stabilitätstheorie für Schalen formuliert, die den Ljapunowschen Begriff der Störung auch auf die Temperatur ausdehnt.

In den konstitutiven Beziehungen für die Schnittreaktionen werden keinerlei Einschränkungen bezüglich der Temperaturverteilung in Dickenrichtung gemacht, so können plötzliche Temperaturveränderungen im Inneren, wie sie infolge schockartiger Erwärmung auftreten, berücksichtigt werden. Wie in [12], so wird auch hier die Energiekonsistenz der konstitutiven Gleichungen - hier bei Mitnahme temperaturbedingter Anteile - für unterschiedliche Approximationen⁸ nachgewiesen.

Besonderes Augenmerk wird auf die Mitnahme thermoelastischer Kopplungseffekte zwischen den Temperatur- und Verformungsfeldern gerichtet. Wir gehen von - im Allgemeinen dynamischen - thermomechanischen Prozessen aus; das heißt mit dem hier entwickelten 'Formelapparat' können Schwingungen von Schalenträgwerken beliebiger Geometrie untersucht werden, die sowohl thermischen (z.B. Temperaturschock,

⁸Die Approximationen richten sich nach der jeweiligen Mitnahme von Krümmungsanteilen in den konstitutiven Gleichungen, siehe Abschnitt 3.3.

Absch.7.1), als auch mechanischen Einwirkungen (z.B. Druckschock, Absch.7.2) unterworfen werden. Aufgrund des Kopplungsterms in der Wärmeleitgleichung haben diese Schwingungen aber zu jedem Zeitpunkt der Betrachtung Rückwirkungen auf die Temperaturen in der Schale. Eine gekoppelte Analyse, wie sie in jedem der hier behandelten Berechnungsbeispiele durchgeführt wird, umfasst also neben einer Lösung der Bewegungsgleichungen zeitgleich eine Lösung der Wärmeleitgleichung. Hierzu gehören dann noch thermische, sowie mechanische Randbedingungen der jeweiligen Schale.

Besonders intensiv werden hier thermische Randbedingungen behandelt, wozu in Abschnitt 1.4 auch kurz auf die Lehre von der Wärmeübertragung eingegangen wird. Im Sinne einer Erweiterung von [26] werden die, für praktische Anwendungen ganz besonders wichtigen Konvektionsrandbedingungen nicht nur formelmäßig dargestellt, siehe Tabelle 4.1, sondern auch in das hier entwickelte Lösungsverfahren integriert. Es kann gezeigt werden, dass auch in Zusammenhang mit Konvektionsrandbedingungen Orthogonalitätsbedingungen existieren, die für das Lösungsverfahren wichtig sind.

Da (heutige) kommerzielle FE-Programme eine dynamisch-gekoppelte Analyse, bei der neben den Bewegungsgleichungen auch die Wärmeleitgleichung zeitgleich - unter Beachtung der elastischen Kopplung - gelöst wird, nicht zulassen, wird in der vorliegenden Arbeit ein eigenes Lösungsverfahren entwickelt. Dieses Lösungsverfahren implementiert Ergebnisse (quasistatische Felder, Eigenschwingformen), die im Rahmen von Vorberechnungen z.B. mit *MSC/NASTRAN*⁹ durchzuführen sind. Nach Abspaltung des quasistatischen Problems - das entkoppelt ist - verbleibt das gekoppelte dynamische Problem, das in Abschnitt 4.5/6 formelmäßig einer Lösung zugeführt wird: Basierend auf der Eigenformmethode wird das ursprünglich zeit- und ortsabhängige Differenzialgleichungssystem in ein reines Zeitdifferenzialgleichungssystem überführt, das programmtechnisch leicht gelöst werden kann. Das entwickelte Lösungsverfahren besitzt allgemeine Gültigkeit, da beliebig gekrümmte, dünne Schalentragswerke - auch nichtlinear - behandelt werden können. Die auftretenden Temperaturfelder können beliebig orts- und zeitabhängig sein. Das Lösungsverfahren behält so seine Gültigkeit für eine ganze Reihe thermischer sowie mechanischer Randbedingungen¹⁰.

In Kapitel 7 wird das Lösungsverfahren auf unterschiedliche Problemstellungen angewandt. In diesem Zusammenhang war die Entwicklung eigener *FORTRAN*-Programme notwendig. Der Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur zeigt auch bei Mitnahme der Kopplung eine sehr gute Übereinstimmung.

Zur Lösung des dynamischen Problems wird also hier die Eigenformmethode verwendet, wozu die Überführung von Differenzial- in Integralgleichungen notwendig ist. So werden beispielsweise die Bewegungsgleichungen der Schale mittels des *Prinzips der virtuellen Verrückungen* in eine Arbeitsformulierung überführt. Ausgehend von diesen Integralgleichungen der 'Bewegung' und der 'Wärmeleitung', die sich in Abschnitt 4.5/6 finden, wäre es ebenso denkbar, eigenständige FE-Formulierungen für

⁹Kommerzielles FE-Programmsystem, mit dem mechanische, als auch thermisch Strukturprobleme behandelt werden können.

¹⁰Siehe Abschnitt 4.2 und Abschnitt 4.3.

thermomechanisch gekoppelte Schalen zu entwickeln, worauf hier verzichtet wird.

Eine Anwendung des Lösungsverfahrens auf - im allgemeinen instationäre - Probleme der Wärmeleitung, wie in [49], ist problemlos möglich, wenn man auf die Lösung der Bewegungsgleichungen verzichtet und den Kopplungsterm in der Wärmeleitgleichung streicht. Die Lösung der Wärmeleitgleichung mittels dreidimensionaler Eigenformen ist in der Literatur - meines Wissens - bisher so nicht durchgeführt worden. Diese Temperatureigenformen werden von kommerziellen FE-Programmen - im Gegensatz zu Eigenschwingformen - nicht geliefert. Sie werden hier in ein- und zweidimensionale Anteile 'zerlegt': Auf deren Berechnung wird im Anhang ausführlich eingegangen.

Abschließend soll noch kurz auf die Bedeutung der Thermodynamik für die vorliegende Arbeit eingegangen werden. Hier wird eine in sich geschlossene Theorie entwickelt, die auf den Grundlagen der Thermodynamik aufbaut, diese auf die Kontinuumsmechanik anwendet, um schließlich in einer thermomelastisch gekoppelten Schalentheorie zu münden. Eine Beschäftigung mit den Grundlagen der Thermodynamik ist zwar mühsam und führt auch selten schnell zu konkreten Ergebnissen, macht aber durchaus Sinn, wenn man erkennt, dass sich viele der in der Kontinuumsmechanik üblichen Beziehungen aus diesen Grundlagen ableiten lassen. So können - wie in Abschnitt 2.1.4 gezeigt - die Erhaltungsgleichungen ausgehend vom ersten Hauptsatz abgeleitet werden. Die Einführung allgemeiner Formulierungen für Stoffgesetze - in der Gestalt von Zustandsgleichungen - mit den darin enthaltenen Zustandsvariablen gelingt dann, wie in Abschnitt 2.2.1 veranschaulicht, ausgehend von übergeordneten Prinzipien der Thermodynamik. In diesem Zusammenhang wird insbesondere auf die Bedeutung der *Gibbschen Fundamentalgleichung* hingewiesen, die sich im Rahmen einer Kontinuumstheorie - näherungsweise - auch auf irreversible Prozesse anwenden lässt. 'Irreversibilitäten' stehen hier in Verbindung mit plastischen Deformationen¹¹ und der Wärmeleitung. Dann muss insbesondere auf die Erfüllung des zweiten Hauptsatzes geachtet werden: In diesem Sinne wird die *thermomechanische Konsistenz* der Stoffgesetze in Abschnitt 2.2.2 nachgewiesen.

¹¹Bei Übergang auf die Schalentheorie in Kapitel 3 werden plastischen Deformationen gestrichen!

Kapitel 1

Allgemeine thermodynamische Zusammenhänge

Die *Thermodynamik* macht allgemeine Aussagen über Systeme, deren Eigenschaften und Energieen. Aufgrund ihrer 'Allgemeingültigkeit' findet sie Anwendung in praktisch allen Naturwissenschaften (Physik, Chemie, Biologie usw.). Da mit ihr allein jedoch konkrete und detaillierte Aussagen über die untersuchten Prozesse (Vorgänge) nicht möglich sind, muss sie - um praktische Anwendungen möglich zu machen - stets mit anderen Disziplinen verknüpft werden, die dann auf ihr aufbauen.

Man kann sich in diesem Zusammenhang ein Bauwerk vorstellen, bei dem das 'Fundament' die Thermodynamik ist, auf dem die verschiedensten 'Gebäude' (z.B. Gasdynamik, Strömungslehre oder wie hier die Kontinuumsmechanik) mit 'sicherem Stand' errichtet werden können. Die Thermodynamik ist dazu geeignet, unterschiedliche Fachdisziplinen miteinander zu verzahnen. So werden im weiteren Verlauf der Arbeit Erkenntnisse aus der *Lehre von der Wärmeübertragung* mit Erkenntnissen aus der *Kontinuumsmechanik* verknüpft und zu einer einheitlichen Theorie verarbeitet. Hierzu dient der 1. Hauptsatz, der, wenn er von Energie 'spricht', keinen Unterschied zwischen der Form der jeweiligen - mechanischen bzw. thermischen - Energie macht.

Bevor wir zur Formulierung der thermodynamischen Hauptsätze kommen, werden im Sinne einer ganzheitlichen Darstellung die Grundbegriffe der Thermodynamik nachfolgend erläutert.

1.1 Grundbegriffe der Thermodynamik

Viele der in der Thermodynamik verwendeten Begriffe sind aus dem alltäglichen Sprachgebrauch bekannt (System, Prozess, Zustand usw.). Um Thermodynamik sinnvoll betreiben zu können, ist es unerlässlich, sich in einem ersten Schritt darüber klar zu werden, was mit diesen Begriffen konkret gemeint ist. In den nachfolgenden Ausführungen wird - in Anlehnung an die Literatur - versucht, diese Bedeutungen in möglichst knapper und leicht verständlicher Form darzulegen. Wo es für das

weitere Verständnis der Arbeit hilfreich ist, wird versucht, den Bezug zur Mechanik herzustellen. Insbesondere auf die Formulierung von Zustandsfunktionen - mit Bezügen zur Praxis - wird hier detailliert eingegangen.

Makroskopische Betrachtungsweise:

Im Rahmen der in der Kontinuumsmechanik üblichen makroskopischen Betrachtungsweise wird die Tatsache außer Acht gelassen, dass die Materie aus kleinsten Teilchen zusammengesetzt ist. So können nach [66] physikalische Eigenschaften von Raumbereichen beschrieben werden, die sehr viel größer als die mittlere freie Weglänge zwischen den kleinsten Teilchen sind.

System:

Gemäß [74] versteht man unter einem thermodynamischen System „dasjenige materielle Gebilde, dessen thermodynamische Eigenschaften man untersuchen möchte. Das System wird durch die Systemgrenze von seiner Umwelt getrennt, die man Umgebung nennt. Eine Systemgrenze muss keineswegs fest und unbeweglich sein, sondern sie darf sich während des Vorgangs, den man zu untersuchen wünscht, auch verschieben, und sie darf außerdem für Energie und Materie durchlässig sein.“

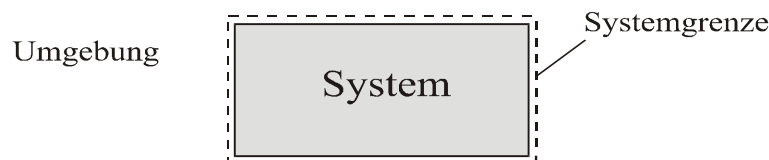


Abbildung 1.1: Das System und seine Umgebung

In diesem Zusammenhang ist die folgende Unterscheidung üblich:

- *Offene* Systeme sind bezüglich Energie- und Materiezufuhr offen.
- *Geschlossenen* Systemen kann man aus ihrer Umgebung lediglich Energie zuführen.
- Ein *abgeschlossenes* System ist von seiner Umgebung vollkommen isoliert, d.h. auch ein Energietransport über die Systemgrenzen ist nicht möglich.

In einer *Kontinuumstheorie*¹ kann man differenzielle Grundgleichungen durch Betrachtungen an einem infinitesimal kleinen - aus einem Festkörper oder Fluid herausgeschnittenen - Volumenelement ableiten. Hier sollen ausschließlich Festkörper behandelt werden; ein Massentransport über die Systemgrenzen kann dann in der Regel ausgeschlossen werden. Offene Systeme werden deshalb in der vorliegenden Arbeit nicht untersucht.

Man kann nun zum einen den zu untersuchenden Festkörper (z.B. eine Schale) als ein System auffassen, auf das man z.B. die Prinzipien der Impuls- und Drallerhaltung

¹Siehe z.B. [19], [26], [4].

anwendet, dann spricht man üblicherweise von einer *globalen Betrachtungsweise*; zum anderen kann man aber auch - wie in Kapitel 2 - ein aus dem Gesamtsystem herausgeschnittenes Volumenelement betrachten und für dieses thermodynamische Gesetzmäßigkeiten formulieren, was einer *lokalen Betrachtungsweise* entspricht. Diese Vorgehensweise, bei der man ein infinitesimal kleines Volumenelement als ein (lokales) System auffasst, führt letztendlich auf *Feldgleichungen* in der Form partieller Differenzialgleichungen, die dann für jeden beliebigen Ort innerhalb des Festkörperkontinuums (*im Gebiet*²) ihre Gültigkeit beibehalten. Eine solche Verknüpfung der Kontinuumsmechanik mit der Thermodynamik wird in [86] als *Thermomechanik* bezeichnet.

Da wir offene Systeme von vornherein ausschließen, untersuchen wir hier im Allgemeinen *geschlossene* Systemen, bei denen Energie sowohl in mechanischer (*Arbeit*), als auch in thermischer Form (*Wärme*) ausgetauscht werden kann.

In der Thermodynamik werden die beiden *Hauptsätze* in ihrer grundlegenden Gestalt für den Sonderfall eines *abgeschlossenen* Systems formuliert. Wie in Abschnitt 1.2 und Abschnitt 1.3.2 gezeigt wird, gelingt die Übertragung auf geschlossene Systeme problemlos.

In der Realität sind abgeschlossene Systeme nicht existent.

Systemeigenschaften, Zustände, Zustandsänderungen:

Für eine formelmäßige Beschreibung eines thermodynamischen Systems ist es notwendig, diesem gewisse physikalische Eigenschaften zuzuordnen, die sich bei den zu untersuchenden Phänomenen (=Erscheinungen) voraussichtlich ändern. Ein thermodynamischer Zustand eines Systems wird dann durch *feste* Werte dieser *Systemeigenschaften* - die auch als *Koordinaten* bezeichnet werden - charakterisiert. Deshalb hängt die Wahl der zu betrachtenden veränderlichen Eigenschaften davon ab, in welcher Hinsicht man den Zustand des Systems untersuchen will: Soll beispielsweise der thermische Zustand analysiert werden, so wird man hierfür veränderliche physikalische Eigenschaften wie die Temperatur³ und die Wärmeströme heranziehen.

In Abschnitt 1.2 wird in Zusammenhang mit dem 1.Hauptsatz der Thermodynamik gezeigt, dass eine Aufspaltung der Gesamtenergie eines Systems in einen Anteil *äußerer* und *innerer Energie* sinnvoll ist. Man kann nun die äußeren Energieformen (potenzielle und kinetische Energie) einem *äußeren Zustand* zuordnen, der z.B. durch die Lage- und Geschwindigkeitskoordinaten des Schwerpunktes festgelegt wird. Charakteristisch für die Starrkörpermechanik ist, dass die Kenntnis dieser *äußeren Systemeigenschaften* für eine vollständige Zustandsbeschreibung ausreichend ist. Grundlegend für die Thermodynamik ist Erkenntnis, dass jedes System eine *innere Energie* besitzt, da erst dadurch das Phänomen *Wärme* erklärbar wird. Das hauptsächliche Interesse der Thermodynamik gilt daher dem *inneren Zustand*, der durch *innere Systemeigenschaften* festgelegt

²Anstelle von 'im Gebiet' kann man auch 'im Feld' sagen.

³Wenn hier von der *Temperatur* die Rede ist, so ist immer die *absolute Temperatur* - gemessen in Grad Kelvin - gemeint, die niemals kleiner oder gleich Null werden kann. Auf eine Einführung dieses Temperaturbegriffs wird hier nicht eingegangen, in der Literatur finden sich ausführliche Überlegungen hierzu, siehe z.B. [74].

wird. So interessiert man sich z.B. bei der Analyse idealer Gase ausschließlich für innere Systemeigenschaften, zu denen Temperatur, Druck und Volumen gehören, und versucht Abhängigkeitsverhältnisse zwischen diesen Größen zu beschreiben.

Eine Unterscheidung zwischen äußerem und innerem Zustand ist aber auch in der Mechanik bekannt: So wird in [5] zwischen *äußeren* und *inneren kinematischen Variablen* der Flächentragwerkstheorien unterschieden und darauf hingewiesen, dass eine Starrkörperbewegung auf die inneren Variablen keine Auswirkungen haben darf. Hierauf wird in Abschnitt 1.2 - in Zusammenhang mit der *Invarianzforderung* - noch genauer eingegangen.

Die hier eingeführten Begriffe werden in Abbildung 1.2 in graphisch veranschaulicht.

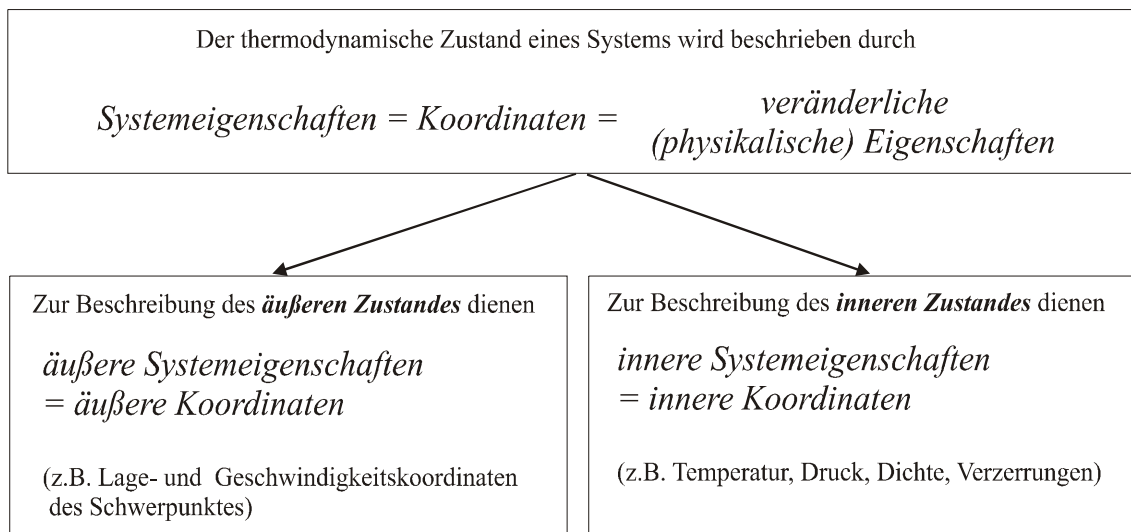


Abbildung 1.2: Aufspaltung in äußere und innere Systemeigenschaften

Zusammenfassend kann man sagen: Interessiert man sich für den äußeren Zustand eines Systems, so interessiert man sich dafür, *wo* sich ein System zu einem bestimmten Zeitpunkt befindet und mit *welcher Geschwindigkeit* es sich bewegt - bei solchen Fragen spielen immer Ort und Geschwindigkeit des Betrachters eine entscheidende Rolle. Im Gegensatz hierzu ist für den inneren Zustand eines Systems die jeweilige Position des Betrachters unerheblich.

Von Zustandsänderungen spricht man, wenn sich die Systemeigenschaften ändern, das System geht dann von einem Zustand in einen anderen über. Eine Zustandsänderung wird durch den zeitlichen Verlauf der Systemeigenschaften beschrieben.

Abhängige und unabhängige Systemeigenschaften:

Da in realen Systemen üblicherweise Abhängigkeiten zwischen den veränderlichen Eigenschaften existieren, unterscheidet man zwischen abhängig-veränderlichen und unabhängig-veränderlichen Eigenschaften. So besteht beispielsweise in dem System 'Feder' ein Abhängigkeitsverhältnis zwischen der Federdehnung und der Federkraft, das üblicherweise mit einem (linearen) Hookschen Gesetz beschrieben wird: Die Eigenschaft *Kraft* kann also unmöglich geändert werden, ohne gleichzeitig die Eigenschaft

Dehnung zu ändern. Für den Fall, dass alle unabhängig-veränderlichen Eigenschaften in einem System bekannt sind, stehen die abhängig-veränderlichen Eigenschaften fest. Die unabhängig-veränderlichen Eigenschaften werden deshalb auch als *Freiheitsgrade* oder *Variablen* eines Systems bezeichnet, siehe hierzu auch Abbildung 1.4 .

Thermodynamischer Raum:

Die Zahl der Freiheitsgrade gibt die Dimension des thermodynamischen Raumes⁴ an, in dem jede Zustandsänderung als eine 'Ortsveränderung' verstanden werden kann. Das diesem 'Raum' zugrunde liegende *Koordinatensystem* wird durch die Wahl der unabhängig-veränderlichen Eigenschaften definiert. Durch eine Reihe von kontinuierlich ablaufenden Zustandsänderungen wird dann ein ganz bestimmter 'Weg' im thermodynamischen Raum zurückgelegt. Existieren beispielsweise drei unabhängig-veränderliche Eigenschaften (X_1, X_2, X_3), so kann die Zustandsänderung von einem *Ausgangszustand* zur Zeit t_0 in einen *Momentanzustand* zur Zeit t , wie in Abbildung 1.3, graphisch veranschaulicht werden.

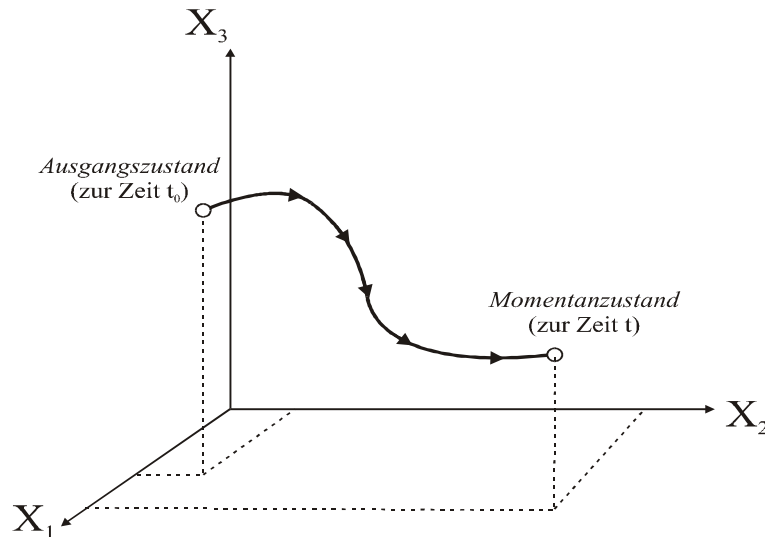


Abbildung 1.3: Zustandsänderung im 3-dimensionalen thermodynamischen Raum

Als *Zustandsfunktion* bezeichnet man eine formelmäßige *Abbildung* der unabhängig-veränderlichen Eigenschaften X_I ($I = 1, 2, \dots, N$) auf eine abhängig-veränderliche Eigenschaft Y_M :

$$Y_M = \hat{Y}_M(X_1, X_2, \dots, X_N) . \quad (1.1)$$

Mit Abbildung 1.4 soll veranschaulicht werden, welche wichtige Bedeutung Zustandsfunktionen in der Thermodynamik zukommt.

Wegunabhängige Zustandsfunktionen, Zustandsgrößen, Zustandsvariable:

Immer wenn man für feste Werte der unabhängig-veränderlichen Eigenschaften X_1, X_2, \dots, X_N eine *eindeutige*⁵ Zustandsfunktion (1.1) angeben kann, spricht man von einer *wegunabhängigen Zustandsfunktion*, weil dann der 'Weg', auf dem der jeweilige

⁴Der thermodynamische Raum wird auch häufig als *Gibbsscher Phasenraum* bezeichnet.

⁵Die *Eindeutigkeit* von *Funktionen mit mehreren Veränderlichen* wird in [10] folgendermaßen

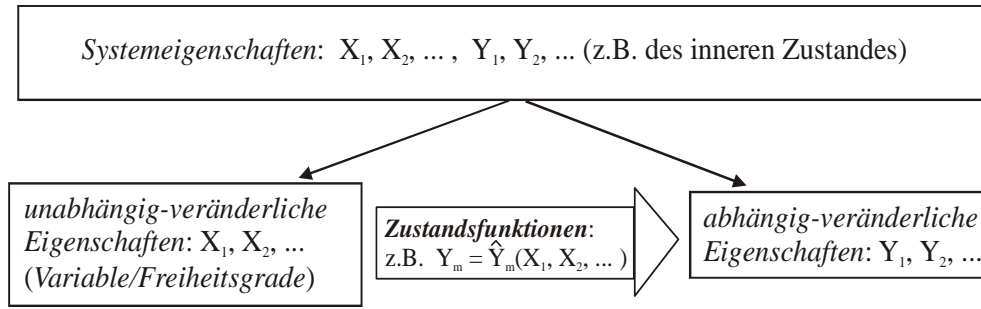


Abbildung 1.4: Zustandsfunktionen

‘Ort’ im thermodynamischen Raum erreicht wird, keinen Einfluss auf den Wert von Y hat. Mit Blick auf Abbildung 1.3 gilt: Hängt der Wert einer abhängig-veränderlichen Eigenschaft Y zum Zeitpunkt t lediglich von den dem Momentanzustand zugeordneten Werten der unabhängig-veränderlichen Eigenschaften (hier $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$) ab, dann spricht man von einer wegunabhängigen Zustandsfunktion \hat{Y} ; die physikalische Eigenschaft Y wird dann als *Zustandsgröße*⁶ bezeichnet. Da man gemäß [74] in wegunabhängigen Zustandsfunktionen abhängige und unabhängige Größen vertauschen kann, sind in Systemen, in denen alle Zustandsfunktionen wegunabhängig sind, alle veränderlichen Eigenschaften Zustandsgrößen.

Für jede diffenzierbare wegunabhängige Zustandsfunktion \hat{Y} gilt gemäß [74]

$$D\hat{Y} = \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_1} DX_1 + \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_2} DX_2 + \dots + \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_N} DX_N. \quad (1.2)$$

Der in (1.2) dargestellte mathematische Zusammenhang wird auch als *vollständiges Differenzial* bezeichnet. Die Reihenfolge der Differenziationen ist dann bei der Bildung zweiter Ableitungen gleichgültig:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial X_I \partial X_K} = \frac{\partial^2 Y}{\partial X_K \partial X_I} \quad (I, K = 1, 2, \dots, N). \quad (1.3)$$

Somit kann man bei einer gegebenen Zustandsfunktion kontrollieren, ob diese wegunabhängig ist, indem man für alle Kombinationen für I und K die Gültigkeit von (1.3) nachweist.

Wir wollen im Folgenden die unabhängig-veränderlichen Zustandsgrößen in einem System als *Zustandsvariable* bezeichnen.

Wegabhängige Zustandsfunktionen, Prozessgrößen, Prozessvariable:

Existieren *wegabhängige Zustandsfunktionen*, so spricht man in diesem Zusammenhang von einem System, das ein ‘*Gedächtnis*’ hat. Die hier beschriebenen Zustandsfunktionen hängen dann neben den jeweiligen Werten $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_N(t)$ auch

definiert: „Ist eine Funktion f von n Variablen gegeben, so wird also jedem Urbild $(x_1, \dots, x_n) \in D(f) \subseteq \mathcal{R}^n$ genau ein Bildpunkt $y = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}$ zugeordnet.“

⁶Gemäß [30] gilt für eine *Zustandsgröße*: „sie hängt nur vom augenblicklichen Zustand des Systems ab, nicht aber davon, wie das System in diesen Zustand gelangt ist.“

noch von deren 'Vorgeschichte' ab. Dies bedeutet, dass der im thermodynamischen Raum zurückgelegte 'Weg' maßgeblichen Einfluss auf die Zustandsfunktion hat. Eine veränderliche Eigenschaft, die unter Einsatz solch einer wegabhängigen Zustandsfunktion berechnet wird, darf gemäß [74] nicht als Zustandsgröße bezeichnet werden. In [44] wird in diesem Zusammenhang der Begriff *Prozessgröße* verwendet.

In Verbindung mit plastischem Materialverhalten spricht man (z.B. [37], [6], [25]) von Stoffgesetzen, bei denen auch die 'Vorgeschichte' eine Rolle spielt. In die Sprache der Thermodynamik übersetzt, sind damit wegabhängige Zustandsfunktionen gemeint. Lehmann formuliert in [44] solche Zustandsfunktionen zur Beschreibung elasto-plastischer Prozesse:

$$Y(t) = \hat{Y}(X_1(\tau), X_2(\tau), \dots, X_N(\tau)) \quad \text{mit} \quad t_0 \leq \tau \leq t. \quad (1.4)$$

Zur Berechnung der abhängigen Prozessgröße $Y(t)$ kann es also notwendig sein, die vollständige 'Vorgeschichte' der *Prozessvariablen* $X_1(\tau), X_2(\tau), \dots, X_N(\tau)$ zu kennen. Überträgt man diese Überlegung auf Zustandsänderungen, in dem in Abbildung 1.3 veranschaulichten thermodynamischen Raum, so heißt das: Der 'Weg', der vom Ausgangs- zum Momentanzustand zurückgelegt wurde, muss bekannt sein, um eine abhängig-veränderliche Eigenschaft Y zum Zeitpunkt t berechnen zu können. Die Gleichungen (1.2) und (1.3) verlieren dann ihre Gültigkeit.

Prozess:

Eine durch ganz bestimmte äußere Einwirkungen hervorgerufene Zustandsänderung bezeichnet man als einen Prozess (Vorgang). Für eine eindeutige Prozessbeschreibung müssen neben dem zeitlichen Verlauf der Zustands- bzw. Prozessgrößen auch die äußeren Einwirkungen bekannt sein. Zu den äußeren Einwirkungen, auf die in Abschnitt 1.2 noch näher eingegangen wird, zählen die einem System zugeführte *Wärme* und die an ihm verrichtete *Arbeit*.

Prozesse können nach der Art der Zustandsänderungen bezeichnet werden. So unterscheidet man in diesem Zusammenhang zwischen

- *isothermen* Prozessen, bei denen die Temperatur konstant bleibt
- *isochoren* Prozessen, bei denen das Volumen konstant bleibt
- und *adiabaten* Prozessen, bei denen Zustandsänderungen nur durch das Verrichten von Arbeit am System hervorgerufen werden; eine Zufuhr von Wärme bleibt dann unberücksichtigt.

Gemäß [66] bezeichnet man als *Kreisprozess* einen thermodynamischen Prozess, „der eine Zustandsänderung mit einander gleichen Anfangs- und Endzuständen bewirkt“.

Thermodynamisches Gleichgewicht:

Vom *thermodynamischen Gleichgewicht* spricht man, wenn sich bei einem System, das von seiner Umgebung isoliert wird, die Zustand- bzw. Prozessgrößen nicht mehr

ändern. In diesem Zusammenhang zählen zu den *notwendigen Gleichgewichtsbedingungen* gemäß [66]:

- *Mechanisches* Gleichgewicht (statisches Kräfte- und Momentengleichgewicht) und
- *thermisches* Gleichgewicht (gleiche Temperatur im System).

Sollen lediglich Zustandsänderungen betrachtet werden, die aus einer Folge von thermodynamischen Gleichgewichtszuständen bestehen, so spricht man in der Thermodynamik von *quasistatischen Zustandsänderungen*. Die '*klassische Thermodynamik*' beschäftigt sich ausschließlich mit solchen Zustandsänderungen, die in der Regel reversibel⁷ sind. Im Gegensatz hierzu werden *Nichtgleichgewichtszustände* in der '*Thermodynamik irreversibler Prozesse*' behandelt.

Gemäß [66] herrscht *lokales Gleichgewicht*, „wenn jedes beliebig herausgegriffene, infinitesimal kleine Teilsystem für sich im Zustand des thermodynamischen Gleichgewichts ist.“ Eine solche Definition des Gleichgewichts spielt insbesondere bei Anwendungen der Thermodynamik im Rahmen einer Kontinuumstheorie eine wichtige Rolle, da dann bei der Beschreibung irreversibler Prozesse Näherungen notwendig werden, siehe Abschnitt 2.2.1, die auf dem folgenden 'Gedankenmodell' basieren: Gemäß [65] wird dann angenommen, dass sich zwar das Gesamtsystem nicht im Gleichgewicht befindet, die infinitesimalen Teilsysteme - in die man sich das Gesamtsystem zerlegt denken muss - aber „untereinander im thermodynamischen Gleichgewicht“ sind.

Zur Klassifizierung von Zustandsfunktionen:

In Verbindung mit thermodynamischen Zustandsfunktionen findet man in der Literatur eine Vielzahl von unterschiedlichen Bezeichnungen - deren Zuordnung manchmal nicht leicht fällt. Deshalb wird hier versucht, in Anlehnung an [26], [72], [44], [45] und [25] eine sinnvolle Systematik der Begriffe einzuführen:

- Als *Zustandsgleichungen* bezeichnen wir wegunabhängige Zustandsfunktionen in der Form von eindeutigen gleichungsmäßigen Abbildungen der unabhängigen auf die abhängigen Systemeigenschaften.
- In Zusammenhang mit Materialverhalten, das von seiner 'Vorgeschichte' abhängt, spricht man in der Literatur häufig von *Funktionalen*⁸: Hierunter verstehen wir wegababhängige Zustandsfunktionen.
- Insbesondere in der Plastizitätstheorie werden alternativ zu wegababhängigen Zustandsfunktionen so genannte *Entwicklungsgesetze* (= *Entwicklungsgleichungen*) verwendet: Diese sind inkrementelle Formulierungen zur Berechnung der jeweiligen abhängigen Systemeigenschaften; hierzu zählt z.B. die *Fließregel*, die zur

⁷Auf reversible und irreversible Prozesse wird in Verbindung mit dem 2.Hauptsatz in Abschnitt 1.3.1 intensiver eingegangen.

⁸Gemäß [63] sind die unabhängigen 'Variablen' eines *Funktional*s Funktionen - z.B. in Abhängigkeit von der Zeit, siehe (1.4).

Berechnung der plastischen Formänderungen benötigt wird. Wie in [25] gezeigt wird, lassen sich Entwicklungsgleichungen in Funktionale überführen, sie können alternativ verwendet werden.

- Alle drei oben aufgeführten Typen von Gleichungen bzw. Funktionen können zusammenfassend als *Stoffgesetze* bezeichnet werden. Ein konkreter *Satz von Stoffgesetzen*⁹ dient dann der Abbildung des tatsächlichen Materialverhaltens im Rahmen einer *phänomenologischen Materialtheorie*; garantiert dieser die Erfüllung des 2.Hauptsatzes für beliebige Prozesse, so wird er in [25] als *thermomechanisch konsistent* bezeichnet.

Wie schon oben angemerkt, werden in der 'klassischen Thermodynamik' üblicherweise Prozesse behandelt, die reversibel sind. Für solche Prozesse existiert in der Regel ein Satz von Stoffgesetzen, der allein aus Zustandsgleichungen besteht, d.h. alle veränderlichen Systemeigenschaften sind Zustandsgrößen; beispielhaft seien genannt *Zustandsänderungen idealer Gase* und *isotherm-elastische Deformationen*.

Bei realen Prozessen können häufig reversible, und auch irreversible Phänomene identifiziert werden, die nebeneinander existieren und miteinander gekoppelt sind, wie beispielsweise bei elasto-plastischen Deformationen. Zur Beschreibung der irreversiblen Phänomene müssen dann zusätzliche Stoffgesetze (z.B. Funktionale, Entwicklungsgesetze) formuliert werden. Zur näherungsweisen Erfassung des realen Materialverhaltens dient dann ein Satz von Stoffgesetzen, der neben wegunabhängigen auch wegabhängige Zustandsfunktionen enthalten kann.

Während zur Beschreibung reversibler Phänomene die Kenntnis der jeweiligen Werte für die *unabhängigen Variablen* im Momentanzustand ausreicht, ist bei irreversiblen Phänomenen häufig auch deren 'Vorgeschichte' maßgeblich. In diesem Zusammenhang heißt es in [25]: „On the other hand, to describe the inelastic material behaviour (viscoelasticity, plasticity, viscoplasticity) it is necessary to incorporate the past history of the independent variables, since the memory properties exist.”

Zur Formulierung und Anwendung von Zustandsfunktionen in der Praxis:

Bei der Formulierung von Zustandsfunktionen müssen meist vereinfachende Annahmen getroffen werden, um so das zu untersuchende reale System mit einem *idealisierten Stoffmodell* beschreiben zu können. Solche idealisierten Stoffmodelle - wie beispielsweise das Modell des *idealen Gases* oder das des *homogen-isotropen Kontinuums* - ermöglichen meist erst das Auffinden einfacher Zusammenhänge zwischen physikalischen Eigenschaften, die wir als Stoffgesetze bezeichnen.

Stoffgesetze mit den darin enthaltenen Materialkonstanten werden häufig durch Messungen ermittelt bzw. verifiziert. So wird beispielsweise für viele metallische Werkstoffe (unterhalb einer definierten Streckgrenze) ein auf Meßwerten basierender linearer Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen näherungsweise angenom-

⁹In der englischsprachigen Literatur spricht man in Zusammenhang von 'constitutive equations' bzw. 'constitutive laws', siehe [25], [72], [44], [45].

men und in Gestalt einer einfachen Zustandsgleichung (Hooke) formuliert. In der Plastizitätstheorie werden auch bleibende Formänderungen berechnet. Ganz besonders wichtig ist dann die Formulierung von Fließbedingungen und Verfestigungsflächen; zur Auffindung solcher Stoffgesetze und zur Identifikation der jeweiligen Stoffkonstanten muss das tatsächliche Materialverhalten (z.B. von Stahl, Beton, Boden) mit einer großen Zahl von Messungen analysiert werden.

Der Vorteil bei der Verwendung idealisierter Stoffmodelle ist die vielseitige Anwendbarkeit. So wird man das Modell des *homogen-isotropen Kontinuums* immer dann zur Beschreibung realer Systeme anwenden, wenn die dem Modell zugrunde liegenden Annahmen (homogener Werkstoff, identische physikalische Eigenschaften in allen Richtungen) mit der Realität - zumindest näherungsweise - zu vereinbaren sind. Unterschiede zwischen dem realen und dem berechneten Materialverhalten können dann auf Annahmen beruhen, die von der Realität mehr oder weniger abweichen. In diesem Zusammenhang sei auch auf idealisierende Modelle der Stab- und Flächentragwerkstheorien hingewiesen, die bei konkreten Berechnungen häufig zum Einsatz kommen.

Das Auffinden konkreter Stoffgesetze und -konstanten basierend auf Messungen ist in der Praxis meist ohne größere Probleme möglich. Man kann dann relativ schnell einen Zusammenhang zwischen physikalischen Größen ermitteln. Die Gültigkeit der gewonnenen Beziehungen ist jedoch auf Zustandsänderungen beschränkt, die unter genau den gleichen Bedingungen wie bei der Messung ablaufen. So kann der (übliche) aus einem einachsigen Druckversuch ermittelte Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen bei Beton nicht immer problemlos auf reale Systeme angewandt werden, weil die aus dem Versuch bestimmte Zustandsfunktion¹⁰ $\sigma_c = \hat{\sigma}_c(\epsilon_c)$ als Zustandsvariable lediglich die Dehnung ϵ_c berücksichtigt. Weitere Zustandsvariable, wie z.B. die Temperatur, deren Einfluss auf σ_c unbestritten ist, bleiben ebenso wie die Belastungsgeschwindigkeit und die '*Belastungsgeschichte*' unbeachtet. Dies mag in vielen Fällen begründet sein, und im Rahmen einer Näherung zu guten Ergebnissen führen, kann aber in Ausnahmefällen zu einer fehlerhaften Bemessung führen, wenn sich der Verantwortliche der Bedeutung solcher unberücksichtigter Einflüsse nicht bewußt ist.

Der kritische und verantwortungsbewußte Berechnungsingenieur muss sich also immer die folgenden Fragen stellen:

- Inwieweit ähnelt mein reales System dem idealisierten Berechnungsmodell?
- Werden die auf Versuchsergebnissen basierenden Stoffgesetze und -konstanten unter ähnlichen Bedingungen ermittelt, wie sie in der zu beschreibenden Realität vorherrschen?

Eine wichtige Kontrollmöglichkeit bei der Aufstellung von Stoffgesetzen liefert der 2.Hauptsatz: Stoffgesetze sind nur dann physikalisch sinnvoll, wenn die Erfüllung des 2.Hauptsatzes für vollkommen beliebige Zustandsänderungen gewährleistet werden kann.

¹⁰Siehe [34].

Intensive, extensive und spezifische Zustands-/Prozessgrößen:

Zustands- und Prozessgrößen können in drei Gruppen eingeteilt werden:

1. *Intensive* Größen (z.B. Temperatur), welche von der *Menge* (Masse bzw. Volumen) eines Systems unabhängig sind und bei einer Teilung des Systems ihre Werte unverändert beibehalten.
2. *Extensive* Größen (z.B. Energie, Entropie), welche proportional zur Menge eines Systems sind.
3. *Spezifische* Größen (z.B. spez. Energie, spez. Entropie), die sich durch Division einer extensiven Grösse X durch die Menge - üblicherweise die Masse m - des Systems ergeben:

$$x = \frac{X}{m} \quad (1.5)$$

Für spezifische Größen werden meist kleine Buchstaben verwendet.

1.2 Der 1.Hauptsatz der Thermodynamik

Basierend auf den Ausführungen in [74] soll hier gezeigt werden, wie - ausgehend von den in der Starrkörpermechanik bekannten Energieformen - mit dem 1.Hauptsatz jedem System eine Größe *Energie* zugeordnet wird, die insbesondere den inneren Zustand mit in Betracht zieht. In Zusammenhang mit dem 1.Hauptsatz werden aber auch Aussagen über mögliche Formen (mechanische Arbeit, Wärme) des Energieaustauschs zwischen Systemen gemacht. Von *Arbeit* wollen wir im Folgenden immer dann sprechen, wenn (äußere) Kräfte an den Systemgrenzen verschoben werden, und dadurch dem System mechanische Energie aus seiner Umgebung zugeführt wird.

Wie wir sehen werden, lässt sich der in der Mechanik starrer Körper bekannte Satz von der Erhaltung der Energie aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ableiten. Dieser auf Erfahrungen beruhende Satz besagt, dass für einen im Schwerfeld bewegten starren Körper - an dem keine äußeren Kräfte angreifen - die Summe aus potenzieller und kinetischer Energie immer konstant bleibt:

$$E_{kin} + E_{pot} = konst. . \quad (1.8)$$

Charakteristisch für die Starrkörpermechanik ist, wie schon in Abschnitt 1.1 angedeutet, dass für eine eindeutige Beschreibung von Zuständen ausschließlich die Kenntnis der äußeren Koordinaten notwendig ist. So kann die potenzielle Energie¹¹ E_{pot} aus den Lagekoordinaten und die kinetische Energie E_{kin} , die sich allgemein aus

¹¹Als potenzielle Energie E_{pot} bezeichnen wir hier das *Potenzial* der inneren Volumenkräfte. Damit ein solches Potenzial existiert, müssen die im Massenmittelpunkt angreifenden Volumenkräfte *konser-*
vativ sein. *Nicht-konservative* Volumenkräfte können mit den hier dargestellten Formulierungen für den 1.Hauptsatz nicht erfaßt werden!

einem translatorischen und einem rotatorischen Anteil zusammensetzt, aus der Translationsgeschwindigkeit des Schwerpunktes und einer Winkelgeschwindigkeit berechnet werden¹². Für die beiden Energieformen müssen dann Zustandsgleichungen existieren: Das heißt, sie werden - wie auch in [66] - als *extensive Zustandsgrößen* eingeführt.

Energieänderungen im Inneren von Systemen können in der Mechanik starrer Körper nicht beschrieben werden, weil hierfür zusätzlich die Kenntnis innerer Koordinaten (Temperatur, Druck, Entropie usw.) notwendig wäre. Will man den Energiebegriff auch auf den inneren Zustand anwenden, so gelingt dies mit dem ersten Hauptsatzes der Thermodynamik. Dieser besagt:

„Jedes System besitzt eine extensive Zustandsgröße Energie. Sie ist für ein abgeschlossenes System konstant.“

Der erste Hauptsatz ist nicht beweisbar, er beruht lediglich auf Erfahrungen und wird deshalb als *Erfahrungssatz* bezeichnet. Aus ihm lassen sich eine Reihe von wichtigen Schlussfolgerungen ziehen:

1. Es gibt keine Maschine, die ständig Arbeit abgibt, ohne gleichzeitig entsprechende Energie aufzunehmen. Ein solches *Perpetuum mobile erster Art* ist also mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik unvereinbar.
2. Jedem beliebigen Zustand eines Systems muss ein eindeutiger Wert für seine physikalische Eigenschaft *Energie* zuweisbar sein, der nicht von der 'Vorgeschichte' des Systems abhängen darf.
3. Berücksichtigt man anders als in der Starrkörpermechanik auch Zustands- und damit Energieänderungen im Inneren von Systemen, die z.B. mit dem Phänomen *Wärme* in Verbindung stehen, so muss die Gesamtenergie eines Systems neben der kinetischen und der potenziellen Energie auch eine andere Energieform umfassen: die *innere Energie* U . Es gilt:

$$E = U + \underbrace{E_{kin} + E_{pot}}_{\text{äußere Energie}} . \quad (1.9)$$

Wir haben oben schon festgestellt, dass die äußeren Energieformen extensive Zustandsgrößen sind. Mit Blick auf (1.9) muss deshalb auch die innere Energie U eine *extensive Zustandsgröße* sein.

Die äußeren Energieformen hängen von der Lage und der Geschwindigkeit eines Körpers ab und sind damit für einen Beobachter leicht meßbar. Zur Messung der inneren Energie müsste der Beobachter die im Inneren eines Körpers angeordneten kleinsten Teilchen (Atome) betrachten¹³. Im Gegensatz zu den Starrkörperanteilen der Energie (E_{kin} , E_{pot}) **hängt die innere Energie ab von der ungeordneten Geschwindigkeit der Atome und ihrer gegenseitigen Lage im Raumgitter**. Die innere Energie setzt sich also auch

¹²Siehe auch [30].

¹³Ausführliche Überlegungen zu einer 'kinetischen Deutung' der inneren Energie finden sich in [74].

wieder aus potenziellen und kinetischen Energien zusammen, wobei diese von der Lage und der Geschwindigkeit des gesamten Körpers unabhängig sind. Da wir hier keine mikroskopischen Betrachtungen anstellen und uns z.B. nicht für Geschwindigkeiten einzelner Atome interessieren, müssen wir zur Berechnung der inneren Energie makroskopisch meßbare Systemeigenschaften des inneren Zustandes identifizieren, die gemittelte Aussagen über den *Mikrozustand* der kleinsten Teilchen enthalten. Eine solche Systemeigenschaft ist die Temperatur: Es existiert ein Zusammenhang zwischen der Temperatur und der ungeordneten Geschwindigkeitsverteilung der Atome in einem Körper; würde man dem Körper eine reine Starrkörperbewegung - und damit eine identische (geordnete) Geschwindigkeit seiner Atome - aufzwingen, so würde sich hieraus keine Änderung der Temperatur ergeben.

Für die innere Energie muss also eine Zustandsfunktion existieren, sodass sie bei Kenntnis ganz bestimmter innerer Zustandsvariablen (z.B. der Temperatur) eindeutig berechenbar wird.

Die *Invarianzforderung* besagt dann:

Sowohl die innere Energie, als auch die inneren Zustandsvariablen müssen von einer reinen Starrkörperbewegung, die den Mikrozustand unberührt lässt, unabhängig sein.

Da man aber unter einer reinen Starrkörperbewegung auch eine Änderung des Bezugssystems verstehen kann, siehe Abbildung 2.1, ist die Invarianzforderung identisch mit dem *Prinzip der Objektivität* („independence of the material description from the frame of reference“, [25]).

4. Die Übertragung des 1.Hauptsatzes auf geschlossene Systeme gelingt, indem man sich ein abgeschlossenes Gesamtsystem in eine Reihe miteinander verbundener Teilsysteme zerlegt denkt. Ein Teilsystem tauscht dann Energie mit seiner Umgebung aus. Da die Summe aller Energien innerhalb des Gesamtsystems konstant bleiben muss, ergibt sich, wie in [74] ausführlich gezeigt wird, für den Energieaustausch eines (Teil-) Systems mit seiner Umgebung die folgende Bilanzgleichung:

$$DE = DU + DE_{kin} + DE_{pot} = DW + DQ . \quad (1.10)$$

(1.10) beschreibt einen *Austauschprozess*, bei dem ein Energietransport über die Systemgrenzen stattfindet. Zugeführte Energiebeiträge werden dann mit einem positiven, abgeführte Energiebeiträge mit einem negativen Vorzeichen belegt. Tauscht ein System Energie mit seiner Umgebung aus, so kann ihm diese definitionsgemäß in Form von Wärme DQ und Arbeit DW über seine Systemgrenzen zugeführt werden. Mit (1.10) folgt: Arbeit und Wärme treten während eines Austauschprozesses *zwischen* einem System und seiner Umgebung auf, sie werden deshalb in der Thermodynamik auch nicht als Systemeigenschaften, sondern als *äußere Einwirkungen*¹⁴ bezeichnet. In den nachfolgenden beiden Abschnitten wird erläutert, wie sich Arbeit und Wärme berechnen lassen.

¹⁴Vgl. mit Abschnitt 1.1, **Prozess**.

Die in der Literatur (z.B. [30], [26]) häufig verwendete Formulierung

$$DU = DW + DQ \quad (1.11)$$

gilt hier nur für den Fall, dass die äußere Energie konstant bleibt: $E_{kin} + E_{pot} = konst.$ Ursächlich für diesen Zwiespalt ist die Tatsache, dass viele Autoren in der geleisteten Arbeit DW nicht nur die Arbeit der äußeren, sondern auch die Arbeit der inneren Kräfte (einschließlich der Trägheitskraft) mitnehmen: Änderungen der äußeren Energieformen werden dann in DW mitberücksichtigt.

5. Da man in der *Starrkörpermechanik* Änderungen der inneren Energie und Wärmezufuhr nicht betrachtet, gilt $DU = DQ = 0$. Greifen an einem starren Körper keine äußeren Kräfte an, so ergibt sich auch $DW = 0$. In der Bilanzgleichung (1.10) verbleiben dann lediglich die Änderungen der äußeren Energieformen, die sich zu Null ergeben müssen - eine Zufuhr von Energie ist also bei einem solchen System ausgeschlossen. Hieraus folgt wieder die Gleichung (1.8), die als ein Spezialfall des 1.Hauptsatzes angesehen werden kann.

1.2.1 Energiezufuhr durch Arbeit

Wie wir oben gesehen haben, kann man einem System Energie in Form von Arbeit zuführen. Hierbei tauscht ein System durch Verrichten von Arbeit Energie mit seiner Umgebung über die Systemgrenzen aus. Gemäß [66] wird mechanische Arbeit verrichtet, wenn ein in der Systemgrenze liegender Angriffspunkt eines Kraftvektors \mathbf{F} verschoben wird, siehe auch Abbildung 1.5. Bei einer Verschiebung von 1 nach 2 kann die dabei verrichtete Arbeit mit der aus der Mechanik bekannten Gleichung

$$\Delta W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{z} . \quad (1.12)$$

berechnet werden. In [74] wird gezeigt, dass die Arbeit im Allgemeinen vom Integra-

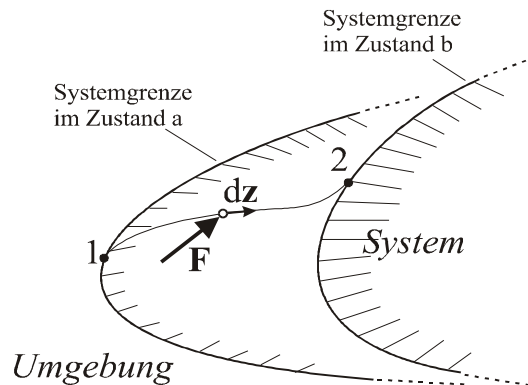


Abbildung 1.5: Verschiebung eines Kraftangriffspunktes

tionsweg abhängt¹⁵. W bzw. ΔW darf deshalb auch nicht als eine Zustandsgröße bezeichnet werden.

¹⁵Ist W vom Integrationsweg abhängig, so bezeichnet man die Kraft \mathbf{F} als *nicht-konservativ*.

Im Folgenden wollen wir mit $D(\dots)$ differenzielle Änderungen von Größen bezeichnen, wie sie bei einer *infinitesimalen Zustandsänderung*¹⁶ während einer sehr kurzen Zeitspanne Dt auftreten. Da dann Änderungen des Kraftvektors \mathbf{F} während Dt zu *von höherer Ordnung kleinen* Beiträgen in der Arbeit führen würden, kann man \mathbf{F} in (1.12) konstant setzen. Somit gilt:

$$DW = \mathbf{F} \cdot D\mathbf{z}, \quad (1.13)$$

wobei $D\mathbf{z}$ (vektoriell) die Verschiebung des Kraftangriffspunktes während Dt beschreibt.

1.2.2 Energiezufuhr durch Wärme

Gemäß [30] nennt man, die ohne Verrichtung von Arbeit ausgetauschte Energie eines Systems Wärme. Im Zusammenhang mit Wärmeaustauschprozessen wird in der Thermodynamik eine neue Zustandsgröße eingeführt - die *Entropie*. Das Verständnis dieser Größe soll hier durch eine Analogiebetrachtung erleichtert werden. Wir wollen dazu einen Prozess, bei dem an einem System Arbeit verrichtet wird mit einem Prozess vergleichen, bei dem einem System Wärme zugeführt wird. Führt man einem System Arbeit durch eine angreifende Kraft mit dem Betrag F zu, deren Angriffspunkt sich geradlinig entlang eines Weges mit der Koordinate z verschiebt, so kann die im Rahmen einer infinitesimal kleinen Zustandsänderung geleistete Arbeit DW mit (1.13) berechnet werden. Hat der Kraftvektor die gleiche Richtung wie der Weg, so gilt:

$$DW = F Dz. \quad (1.14)$$

Der Austausch von Energie zwischen dem System und seiner Umgebung findet hier also statt, indem die Koordinate z geändert wird. Arbeit kann demnach über die Koordinate z in das System 'hinein - bzw. wieder heraus - fließen'. In [74] wird solch eine Koordinate (bildlich) mit einem 'Kanal' verglichen, der das System mit seiner Umgebung verbindet und durch den Arbeit mit der Umgebung ausgetauscht wird.

Betrachtet man nun ein System, welches Wärme mit seiner Umgebung austauscht, so wird man versuchen, auch hier eine ähnliche Koordinate (bzw. Systemeigenschaft) zu finden, durch die das System mit seiner Umgebung verbunden ist, und mit der Wärmeaustausch beschrieben werden kann. Da, wie in [74] ausgeführt wird, keine der herkömmlichen Koordinaten (Temperatur, Ortskoordinaten, Geschwindigkeiten usw.) dazu geeignet ist, muss man eine neue Koordinate - die Entropie S - einführen. Veranschaulicht bedeutet dies: Die Entropie ist ein 'Kanal', durch den dem System Wärme aus seiner Umgebung zufließt. Der in der Thermodynamik¹⁷ übliche Zusammenhang zwischen Entropie und Wärme lautet:

$$DQ = T DS \quad (\text{bei reversibeler Prozessführung}). \quad (1.15)$$

¹⁶Siehe Abbildung 2.2.

¹⁷Siehe z.B. [66], [74], [30].

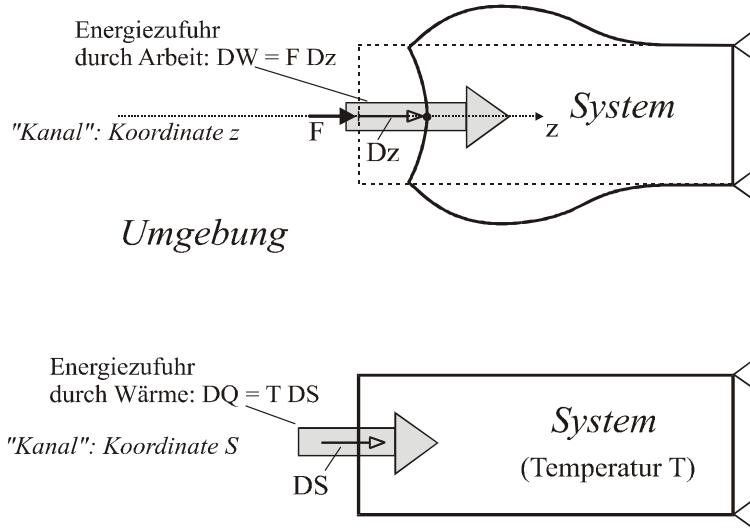


Abbildung 1.6: Analogiebetrachtung zur Entropie

Hierin bezeichnet T die *absolute Temperatur*¹⁸ - gemessen in Grad Kelvin - und S die *Entropie*, die definitionsgemäß eine *extensive Zustandsgröße* ist. Der Vergleich von (1.15) mit (1.14) lässt die Deutung zu, dass es sich bei der Temperatur T um eine Art von 'Kraft' handelt, die auf dem 'Weg' DS - nicht Arbeit verrichtet, sondern - Wärme fließen lässt.

Wie wir später sehen werden, kann Entropie nicht nur von außen zugeführt werden, sondern sie kann bei *irreversiblen Prozessen* auch im Inneren von Systemen erzeugt werden; deshalb ist (1.15) nur für *reversible Prozesse* gültig¹⁹. Eine allgemein gültige Formulierung für geschlossene Systeme erhält man hingegen, wenn man die Änderung der Zustandsgröße Entropie DS auf die beiden oben genannten Phänomene zurückführt: Reversible *Entropiezufuhr* von außen DS^{RE} und irreversible *Entropieerzeugung* im Inneren DS^{IR} . Die *Entropiebilanz* liefert dann:

$$DS = DS^{RE} + DS^{IR}. \quad (1.16)$$

Für die hier behandelten geschlossenen Systeme ist Entropiezufuhr von außen immer auf Wärmeaustausch zurückführbar: Wärme und Entropie strömen gemeinsam über die Systemgrenzen. Bei reversiblen und irreversiblen Prozessen gilt dann für die einem System zugeführte Wärme:

$$DQ = T DS^{RE}. \quad (1.17)$$

Die Größe Entropie, die hier aus einer Analogiebetrachtung abgeleitet wurde, kann auch *statistisch* gedeutet werden:

Jeder Makrozustand eines Systems kann durch eine ganz bestimmte Zahl N unterschiedlicher Mikrozustände verwirklicht werden. Die Zahl N wird auch als *thermo-*

¹⁸Wir wollen im Folgenden die *absolute Temperatur* T kurz als 'die Temperatur' bezeichnen. Die Temperatur T kann in der Natur niemals kleiner oder gleich Null sein: $T > 0$.

¹⁹Reversible und irreversible Prozesse werden in Abschnitt 1.3.1 ausführlich behandelt.

dynamische Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Von Boltzmann wurde gezeigt, dass zwischen der Entropie und der thermodynamischen Wahrscheinlichkeit ein formelmäßiger Zusammenhang der Form $S = k \ln(N)$ existiert. In diesem Zusammenhang spricht man auch davon, dass die Entropie ein Maß für die *molekulare Unordnung* in einem System ist. Da die vielfältigen thermodynamischen, mathematischen und quantenmechanischen Überlegungen, die im Zusammenhang mit der Größe Entropie stehen, in der vorliegenden Arbeit unmöglich abgehandelt werden können, kann hier für den besonders Interessierten lediglich auf die Fachliteratur ²⁰ verwiesen werden.

1.3 Der 2.Hauptsatz der Thermodynamik

Aus dem 1.Hauptsatz der Thermodynamik haben wir unter anderem gefolgert, dass für alle realen Prozesse die Energiebilanz erfüllt werden muss. Dies schränkt aber die 'Richtung', in der ein Prozess abläuft, noch nicht ein. Erst im Zusammenhang mit dem 2.Hauptsatz wird unterschieden zwischen *reversiblen* (= umkehrbaren) Prozessen und *irreversiblen* (= nicht-umkehrbaren) Prozessen. Deshalb sind die in Abschnitt 1.3.1 getroffenen Aussagen über die Nicht-Umkehrbarkeit von ganz bestimmten Klassen von Prozessen (z.B. Wärmeleitung) bereits als *qualitative Formulierungen* des 2.Hauptsatzes anzusehen.

Unter dem '2.Hauptsatz der Thermodynamik' versteht man aber auch eine *formelmäßige Unterscheidung* zwischen reversiblen und irreversiblen Prozessen. Hierzu bedient man sich der Größe *Entropie*, die wir schon zur Beschreibung von Wärmeübergängen kennengelernt haben. Die erhebliche Bedeutung dieser Größe bei der Beschreibung realer Vorgänge kann erst vor dem Hintergrund des 2.Hauptsatzes begriffen werden, weil eine allgemeinere formelmäßige Beschreibung dieses Hauptsatzes ohne die Entropie kaum möglich ist.

1.3.1 Reversible und irreversible Prozesse

Viele der in der Mechanik idealisierend beschriebenen Phänomene sind reversibel, wie beispielsweise der *freie Fall*, der *elastische Stoß* oder *ungedämpfte Schwingungen*. Unter *reversiblen Prozessen* versteht man in der Thermodynamik physikalische Vorgänge, die *vollständig rückgängig* gemacht werden können. Dies bedeutet, dass sich alle beteiligten Körper nach Ablauf eines Prozesses auch wieder in ihren Ausgangszustand zurückversetzen lassen, ohne dass *bleibende Veränderungen* in der Umgebung des Systems zurückbleiben. Ist solch ein umgekehrter Prozessablauf möglich, dann spricht man von einem umkehrbaren oder reversiblen Prozess.

Beispiel (siehe Abbildung 1.7):

Einen solchen reversiblen Prozess (1) stellt man sich folgendermaßen vor: Unter dem Einfluss der Schwerkraft fällt eine Masse M aus der Höhe h auf eine masselose Vertikalfeder

²⁰Siehe z.B. [74], [18]

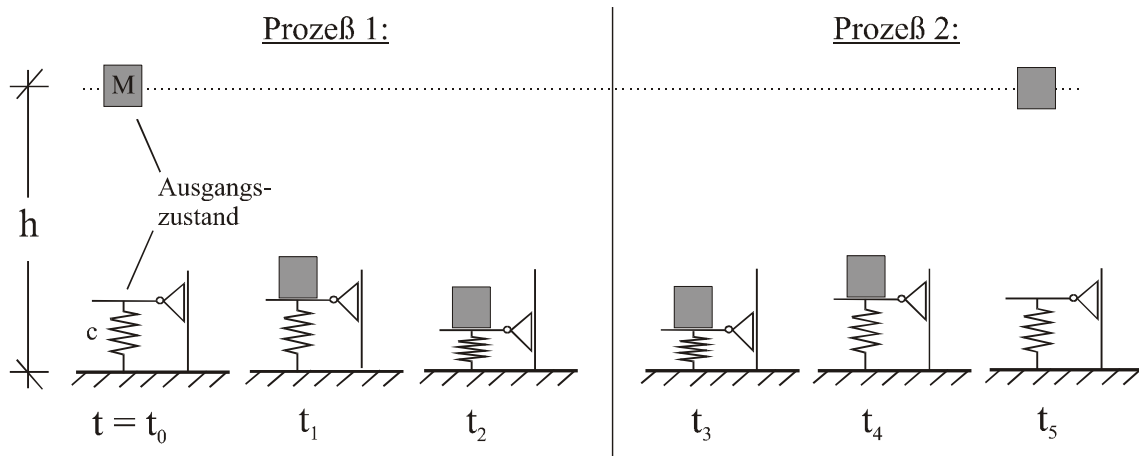


Abbildung 1.7: ein einfacher reversibler Prozess

und drückt diese anschließend zusammen. Reibungs- und Dämpfungseffekte bleiben hierbei unberücksichtigt. Der Prozess 1 sei zum Zeitpunkt t_2 beendet, wenn die Feder ihre maximale Stauchung erfährt; die Masse wird dann festgehalten.

Würde man nun in einem zweiten Prozess (2) die Masse zum Zeitpunkt t_3 wieder loslassen, so würden alle zeitveränderlichen Zustandsgrößen (E_{pot}^{Feder} , E_{kin}^{Masse} , E_{pot}^{Masse} usw.) in 'umgekehrter Zeitrichtung' die gleichen Werte wie beim ursprünglichen Prozess durchlaufen, siehe Abbildung 1.8. Zum Zeitpunkt t_5 haben dann die Masse und die Feder ihre Ausgangszustände wieder erreicht, ohne dass hierzu Änderungen in der Umgebung notwendig gewesen wären.

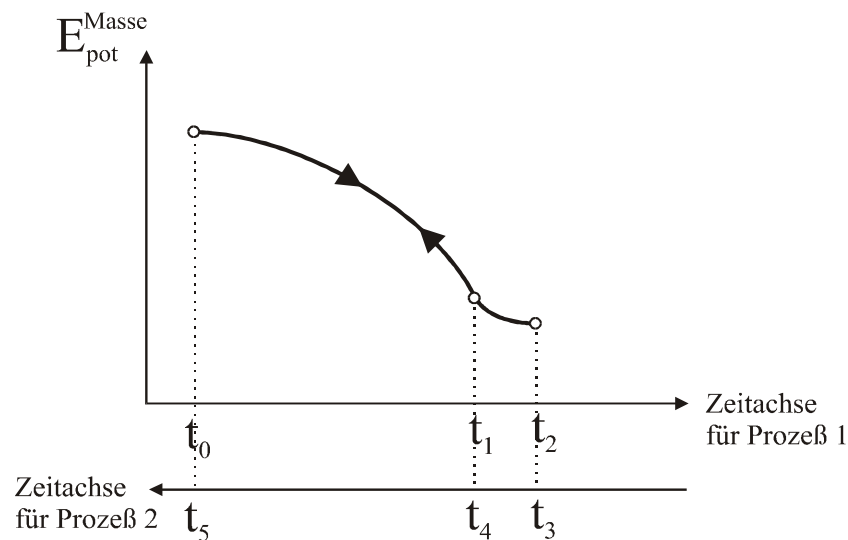


Abbildung 1.8: 'Umkehrbarkeit' der Zustandsgröße E_{pot}^{Masse} bei einem reversiblen Prozess

Im Gegensatz zu reversiblen Prozessen können irreversible Prozesse nicht vollständig rückgängig gemacht werden. Dies bedeutet, dass der Ausgangszustand - wenn überhaupt - nur dann wieder hergestellt werden kann, wenn man bleibende Veränderungen in der Umgebung zulässt. Solche bleibenden Veränderungen würden

z.B. auftreten, wenn man einem System aus seiner Umgebung Energie zuführen müsste, um nach Ablauf eines Prozesses den Ausgangszustand wieder herzustellen. Typische irreversible Prozesse sind:

- Prozesse, bei denen mechanische Energie z.B. infolge Reibung, plastischer (bleibender) Deformationen oder *viskoser Dämpfung* dissipiert, also in Wärme umgewandelt wird, oder
- *Wärmeaustauschprozesse*, bei denen Wärme von Regionen höherer Temperatur nach Regionen niedrigerer Temperatur fließt. Eine vollständige Umkehrung eines solchen Wärmeaustauschprozesses ist nicht möglich, weil Wärme niemals selbständig von Regionen niedrigerer Temperatur nach Regionen höherer Temperatur fließen kann²¹.

Da man Temperaturunterschiede in Systemen zur Gewinnung von mechanischer Energie nutzen könnte²², kann man alle irreversiblen Prozesse gemäß [74] mit einer einzigen Aussage charakterisieren:

„Bei irreversiblen Prozessen nimmt die in Arbeit umwandelbare Energie stets ab.“

Eine qualitative Formulierung des 2.Hauptsatzes besagt, dass alle in der Natur vorkommenden Prozesse irreversibel sind; reversible Prozesse können lediglich als idealisierte Prozesse gedacht werden. Wie schon der erste, so ist auch der zweite Hauptsatz ein *Erfahrungssatz*, der nicht bewiesen werden kann.

1.3.2 Allgemeine Formulierungen des 2.Hauptsatzes

1.3.2.1 Formulierungen für abgeschlossene Systeme

Bildet man - wie in Abbildung 1.9 dargestellt - aus zwei Körpern mit unterschiedlichen Temperaturen T_1 und T_2 ein abgeschlossenes Gesamtsystem, so kommt es zum Wärmeaustausch zwischen den beiden Körpern: Wärme fließt von Regionen höherer nach Regionen niedrigerer Temperatur. Da - wie oben erwähnt - ein umgekehrter Wärme fluß in der Natur nicht *von selbst* vorkommt, ist dieser Prozess irreversibel. Wie in [74] rechnerisch nachgewiesen wird, kann die Zustandsgröße Entropie in dem abgeschlossenen Gesamtsystem nur zunehmen. Das geschilderte System wird sich mit zunehmender Zeit immer weiter einem statischen Endzustand annähern, in dem die Temperaturen in jedem der beiden Teilsysteme identisch sind: $T_1 = T_2$. In diesem Endzustand, der theoretisch erst nach unendlich langer Zeit ($t \rightarrow \infty$) erreicht wird, stellt sich ein thermodynamisches Gleichgewicht ein, bei dem die Entropie einen Maximalwert erreicht.

²¹Siehe Abschnitt 1.4.1.

²²Dies leistet z.B. ein *Carnot-Prozess*, siehe [18].

Ausgangszustand: $t = 0$

Endzustand: $t = \infty$

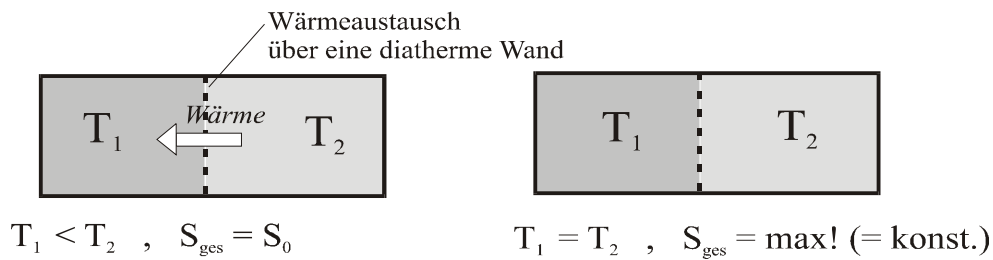


Abbildung 1.9: ein einfacher irreversibler Prozess

Durch Verallgemeinerung dieser Überlegungen erhält man eine Formulierung für den 2.Hauptsatz der Thermodynamik:

In abgeschlossenen Systemen laufen irreversible Austauschprozesse stets so ab, dass die Zustandsgröße Entropie zunimmt. Der Grenzfall des thermodynamischen Gleichgewichts stellt sich ein, wenn die Entropie ein Maximum erreicht.

In solchen abgeschlossenen Systemen, die mit ihrer Umgebung keine Wärme austauschen ($DQ = 0$), gilt also vor dem Erreichen eines Gleichgewichtszustandes:

$$DS > 0. \quad (1.18)$$

Ein thermodynamisches Gleichgewicht stellt sich ein, wenn die Entropie konstant bleibt. Da man in der Thermodynamik unter einem *reversiblen Prozess* eine Folge von thermodynamischen Gleichgewichtszuständen versteht, gilt hier:

$$DS = 0. \quad (1.19)$$

Abgeschlossene Systeme sind von ihrer Umgebung isoliert, von außen kann also wegen (1.17) weder Wärme noch Entropie zugeführt werden: $DQ = 0 \Rightarrow \overset{RE}{DS} = 0$. Somit folgt hier aus (1.16):

$$DS = \overset{IR}{DS} \quad (1.20)$$

In Worten bedeutet dies: Wenn kein Austausch mit der Umgebung stattfindet, kann Entropie lediglich im Inneren erzeugt bzw. produziert werden. Fasst man die angestellten Überlegungen zusammen, so folgert man für *abgeschlossene Systeme*:

$$\begin{aligned} DS &= \overset{IR}{DS} > 0 \quad \text{für irreversible Prozesse;} \\ DS &= \overset{IR}{DS} = 0 \quad \text{für reversible Prozesse.} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Änderungen der Entropie in abgeschlossenen Systemen beruhen also immer auf sogenannten 'Irreversibilitäten', die mit $\overset{IR}{DS}$ beschrieben werden.

Im Rahmen der in Abschnitt 1.2.2 angesprochenen *statistischen Deutung* der Zustandsgröße Entropie besagt der 2.Hauptsatz:

Die molekulare Unordnung in einem abgeschlossenen System kann bei irreversiblen Prozessen mit fortlaufender Zeit t nur zunehmen.

1.3.2.2 Formulierungen für geschlossene Systeme

Beim Übergang auf geschlossene Systeme muss lediglich beachtet werden dass, - wie in Abschnitt 1.2.2 erläutert - dann auch Entropie durch Wärmeaustausch einem System aus seiner Umgebung zugeführt werden kann:

$$D\overset{RE}{S} = \frac{DQ}{T}. \quad (1.22)$$

Für die Entropieerzeugung im Inneren, die definitionsgemäß aus 'Irreversibilitäten' resultiert, gilt weiterhin die in (1.21) getroffene Einschränkung: $D\overset{IR}{S} \geq 0$. Teilt man in (1.16) durch das Zeitdifferenzial Dt , so ergibt sich mit $\frac{D(\dots)}{Dt} = (\dot{\dots})$ die Entropiebilanz:

$$\dot{S} = \overset{RE}{\dot{S}} + \overset{IR}{\dot{S}}. \quad (1.23)$$

Im Folgenden wollen wir $\overset{RE}{\dot{S}}$ als *Entropieströmung* und $\overset{IR}{\dot{S}}$ als *Entropieproduktion* bezeichnen. Für die Entropieproduktion gilt der 2.Hauptsatz der Thermodynamik, dem erfahrungsgemäß alle in der Natur vorkommenden Prozesse genügen müssen:

$$\left. \begin{array}{l} \overset{IR}{\dot{S}} = 0 \quad \text{für reversible Prozesse;} \\ \overset{IR}{\dot{S}} > 0 \quad \text{für irreversible Prozesse;} \\ \overset{IR}{\dot{S}} < 0 \quad \text{in der Natur nicht möglich;} \end{array} \right\} \overset{IR}{\dot{S}} \geq 0. \quad (1.24)$$

Definitionsgemäß sind reversible Prozesse *Gleichgewichtsprozesse*, bei denen die Entropieproduktion verschwindet. Im Gegensatz hierzu befinden sich irreversible Vorgänge nicht im *thermodynamischen Gleichgewicht*, man spricht dann von *Nichtgleichgewichtsprozessen*.

Alternativ zu (1.24) existieren in der Literatur (z.B. in [26].) auch noch andere Formulierungen für den 2.Hauptsatz, die man aus (1.22) bis (1.24) leicht ableiten kann:

$$\dot{S} \geq \frac{\dot{Q}}{T} \quad \text{oder} \quad \dot{S} \geq \overset{RE}{\dot{S}}. \quad (1.25)$$

In Worten besagt dies: Die Entropieströmung muss immer kleiner (bei irreversiblen Prozessen) oder gleich (bei reversiblen Prozessen) der zeitlichen Änderung der Zustandsgröße Entropie sein.

Multipliziert man den Entropiezuwachs im Inneren $D\overset{IR}{S}$ mit der Temperatur T , so ergibt sich eine *Energiegröße*:

$$D\Psi = T D\overset{IR}{S}; \quad \text{bzw.} \quad \dot{\Psi} = T \overset{IR}{\dot{S}}. \quad (1.26)$$

Als Folge irreversibler Prozesse tritt also in Systemen eine *Dissipationsenergie* $\dot{\Psi}$ auf. Häufig findet sich hierfür die Bezeichnung 'Energieverlust'. Da aber im Hinblick auf den 1.Hauptsatz Energie nicht verloren gehen darf, ist es besser - wie in [74] - sie als eine Energie zu bezeichnen, die sich nach Prozessablauf als eine „andere, häufig unerwünschte Energie im System“ wiederfindet. So wird beispielsweise bei der elasto-plastischen Deformationen eines Körpers ein Teil der dem System durch Arbeit zugeführten Energie nicht in mechanisch nutzbare Energie, sondern in thermische Energie umgewandelt. In Verbindung mit solchen Phänomenen, bei denen mechanische in nicht-mechanische Energie umgewandelt wird, wollen wir im Folgenden von *mechanischer Dissipation* sprechen.

Bei dem in Abbildung 1.9 dargestellten Prozess fließt Wärme von 'Warm' nach 'Kalt'. Da dieser Prozess irreversibel ist, muss also auch bei Wärmeübertragung eine Dissipationsenergie mit (1.26) berechenbar sein. Diese lässt sich jedoch nicht auf die oben erwähnte mechanische Dissipation zurückführen. In Zusammenhang mit Wärmeübertragungsprozessen (z.B. Wärmeleitung) von '*thermischer Dissipation*' zu sprechen ist zwar naheliegend, kann aber zu Irritationen führen, da hierbei tatsächlich keine 'Umwandlung in eine andere Energieform' stattfindet. In der Literatur werden diesbezüglich unterschiedliche Meinungen vertreten²³.

Mit (1.26) folgt wegen $T > 0$ aus (1.24) eine weitere mögliche Formulierung des 2.Hauptsatzes:

$$\dot{\Psi} \geq 0. \quad (1.27)$$

Die *Dissipationsleistung* $\dot{\Psi}$ darf also ebenso wie die Entropieproduktion \dot{S}^{IR} bei allen in der Natur vorkommenden Prozessen niemals negativ werden. Unterscheidet man bei einer Untersuchung thermomechanischer Prozesse - wie oben beschrieben - zwischen thermischen und mechanischen Anteilen in der Dissipationsleistung, so ist wie in [86] die folgende additive Aufspaltung denkbar:

$$\dot{\Psi} = \dot{\Psi}_{therm} + \dot{\Psi}_{mech}. \quad (1.28)$$

Fordert man nun

$$\dot{\Psi}_{therm} \geq 0 \quad \text{und} \quad \dot{\Psi}_{mech} \geq 0, \quad (1.29)$$

so kann der 2.Hauptsatz (1.27) in jedem Falle erfüllt werden²⁴.

Üblicherweise kann man wie in [72] an einer konkreten Formulierung für die Gesamtdissipationsleistung ablesen, welche dissipativen Phänomene in der jeweiligen Materialtheorie berücksichtigt werden. So führt die Anwendung der thermodynamischen Hauptsätze auf ein infinitesimal kleines Volumenelement in Abschnitt 2.2 auf eine Formulierung für die (spezifische) Dissipationsleistung, in der der mechanische Anteil den

²³Vergleiche z.B. [6], [74].

²⁴Die Ungleichungen in (1.29) machen Sinn, wenn man auch für die beiden Sonderfälle rein-thermischer und rein-mechanischer Dissipation die Erfüllung des 2.Hauptsatzes erreichen will. In diesem Zusammenhang schreibt Ziegler in [86]: „There are reasons to surmise that the inequality holds for the mechanical and the thermal terms separately.”

plastischen Formänderungen und der thermische Anteil der *Wärmeleitung* zugeordnet werden kann. Bei Berücksichtigung weiterer dissipativer Phänomene (z.B. viskoelastische bzw. -plastische Effekte) würden diese durch ihre jeweiligen Anteile in $\dot{\Psi}$ bzw. \dot{S}^{IR} vertreten sein.

1.3.3 Zur Theorie linearer phänomenologischer Verknüpfungen zwischen 'thermodynamischen Kräften' und 'Strömen'

Über all die oben genannten Anteile, denen man unterschiedliche dissipative Phänomene zuordnen kann, wird in einer konkreten Formulierung für die Entropieproduktion summiert, wobei '*thermodynamische Ströme*' J_K mit '*thermodynamischen Kräften*' X_K multiplikativ verknüpft werden. In diesem Sinne kann der 2.Hauptsatzes wie in [66] durch die *Clausius-Duhemsche Ungleichung* ausgedrückt werden:

$$\dot{S}^{IR} = \sum_K J_K X_K \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \dot{\Psi} = T \sum_K J_K X_K \geq 0 \quad (1.30)$$

Ein fundamentaler Unterschied zwischen reversiblen und irreversiblen Prozessen ist, dass - wie schon oben angemerkt - in der 'Thermodynamik irreversibler Prozesse' sogenannte *Nichtgleichgewichtszustände* behandelt werden. Häufig werden dann Stoffgesetze für 'thermodynamische Ströme' formuliert, die linear von ihren zugehörigen 'Kräften' abhängen. *Lineare phänomenologische Verknüpfungen* dieser Art haben dann den folgenden allgemeinen Aufbau²⁵:

$$J_K = \sum_I L_{IK} X_I \quad (I, K = 1, 2, \dots), \quad (1.31)$$

wobei gemäß [66] „die *phänomenologischen Koeffizienten* L_{IK} vom thermodynamischen Zustand, jedoch nicht von den thermodynamischen Kräften abhängen dürfen”; der Zustand wird beschrieben durch die Zustandsvariablen. Die *Onsagerschen Symmetrierelationen* besagen dann, dass diese Koeffizienten symmetrisch sein müssen:

$$L_{IK} = L_{KI}. \quad (1.32)$$

(1.32) bezeichnet ein Grundgesetz der Thermodynamik, das nicht aus den Hauptsätzen ableitbar ist.

Wie an späterer Stelle (Abschnitt 2.2.2) noch gezeigt werden soll, kann das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung, das im nächsten Abschnitt vektoriell formuliert wird, in Komponentenschreibweise als eine solche lineare Verknüpfung zwischen thermodynamischen Strömen und Kräften gedeutet werden. Die Koeffizienten L_{IK} hängen dann

²⁵Die *Theorie linearer phänomenologischer Verknüpfungen* für thermodynamische Ströme (Flüsse) geht auf L.Onsager zurück: Siehe z.B. [66], [65], [86], [67], [54].

von der Zustandsvariablen T - der Temperatur - ab und sind, wie sich zeigen lässt, symmetrisch.

Allgemein führt diese Theorie durch Einsetzen von (1.31) in (1.30) auf eine in den 'Kräften' quadratische Formulierung für die Dissipationsleistung. Dann lässt sich wie in [66] folgern, dass die Erfüllung des 2.Hauptsatzes maßgeblich von den phänomenologischen Koeffizienten L_{IK} abhängt.

1.4 Die Formen der Wärmeübertragung

Wie wir in Abschnitt 1.2 in Zusammenhang mit dem 1.Hauptsatz festgestellt haben, kann man die Energie eines Systems nicht nur durch Verrichten von Arbeit, sondern auch durch Zufuhr von Wärme verändern - hierbei fließt dem System thermische Energie über seine Systemgrenzen zu. In diesem Kapitel wollen wir uns mit unterschiedlichen Formen der Wärmeübertragung beschäftigen. Wärmeübertragung erfolgt stets als Folge eines Temperaturunterschiedes zwischen einem System und seiner Umgebung, wobei uns der 2.Hauptsatz schon eine Aussage über die Richtung des Wärmestroms liefert: **Wärme fließt von Regionen höherer nach Regionen niedrigerer Temperatur.**

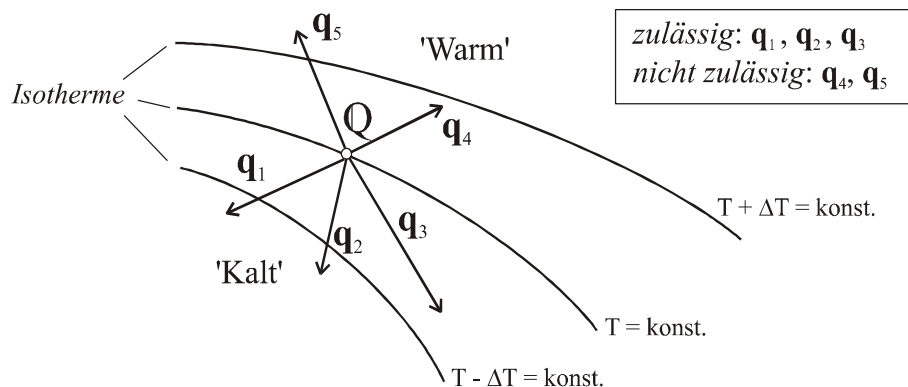


Abbildung 1.10: Beurteilung unterschiedlicher Wärmeströme bezüglich des 2.Hauptsatzes

Innerhalb eines Kontinuums mit einem als bekannt vorausgesetzten Temperaturfeld kommen somit für den Vektor des Wärmestroms²⁶ \mathbf{q} nur ganz bestimmte Richtungen in Frage: Ein Wärmestrom von 'Kalt' nach 'Warm' verstößt gegen den 2.Hauptsatz und ist damit nicht zulässig, siehe Abbildung 1.6 . Konkrete, physikalisch begründete Aussagen über die Fragen nach Intensität, Richtung, sowie Art und Weise des Wärmetransports macht die *Lehre von der Wärmeübertragung*²⁷, bei der Überschneidungen mit der Thermodynamik und der Strömungsmechanik auftreten. Auf die drei wichtigsten Arten der Wärmeübertragung (Wärmeleitung, konvektiver Wärmeübergang und Wärmestrahlung) soll hier kurz eingegangen werden. Da

²⁶Die Größe \mathbf{q} wird in Abschnitt 1.4.1 eingeführt.

²⁷Siehe z.B. [4].

sich unser maßgebliches Interesse auf die Beschreibung und Berechnung von Festkörperkontinua unter thermomechanischen Einwirkungen richtet, werden wir uns hier mit den folgenden *Phänomenen der Wärmeübertragung* befassen:

- Wärmeübertragung innerhalb der untersuchten Kontinua soll allein durch *Wärmeleitung* stattfinden²⁸. Das Kontinuum denkt man sich zusammengesetzt aus miteinander verbundenen, infinitesimal kleinen Volumenelementen (siehe hierzu Abbildung 2.2), die Wärme über ihre Systemgrenzen austauschen.
- Wärmetransport zwischen dem von uns untersuchten Kontinuum und seiner Umgebung durch *Konvektion*. Hierbei wird die äußere Umgebung des Kontinuums als flüssig bzw. gasförmig angesehen.
- Im Zusammenhang mit Wärmeübergang (zwischen dem Kontinuum und seiner Umgebung) durch *Strahlung* werden wir kurz auf die folgenden Themenbereiche eingehen:
 - reine thermische Abstrahlung von Festkörpern
 - der Spezialfall zweier gegenüberstehender, paralleler, ebener Flächen, die Wärme durch Strahlung austauschen
 - Wärmeübergang durch Sonneneinstrahlung.

1.4.1 Wärmeleitung

Bei der Wärmeleitung handelt es sich um einen Energietransport zwischen benachbarten Molekülen. Da der Mechanismus der Wärmeleitung in Festkörpern schwierig zu erfassen ist, sei in diesem Zusammenhang lediglich darauf hingewiesen, dass Metalle aufgrund der zur Verfügung stehenden freien Elektronen im Gitter hierzu besonders geeignet sind²⁹. Zur Beschreibung des auf Wärmeleitung zurückzuführenden Energietransports dient häufig der Vektor des Wärmestroms \mathbf{q} , der orts- und zeitabhängig ist - man spricht deshalb auch von einem *Vektorfeld*. In Anlehnung an [4] wird der *Vektor des Wärmestroms* folgendermaßen eingeführt:

$$DQ/Dt = \dot{Q} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{N} dA . \quad (1.33)$$

In (1.33) bezeichnet \dot{Q} gemäß [4] die pro differentieller Zeitspanne durch „ein beliebig orientiertes Flächenelement dA “ hindurchströmende Wärmemenge³⁰. „Hierbei ist \mathbf{N} der Einheitsvektor in Richtung der (äußeren) Flächennormale“.

Das von Fourier formulierte *Gesetz der Wärmeleitung*

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad}(T) \quad (1.34)$$

²⁸Wir gehen hierbei von der Strahlungsundurchlässigkeit der zu untersuchenden Festkörper aus.

²⁹Das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeiten von Eisen und PVC ergibt sich in etwa zu 540:1.

³⁰Siehe auch Anhang E, Abbildung E.1.

besagt nun, dass in einem Punkt Q im Kontinuum der Vektor des Wärmestroms senkrecht auf der durch Q verlaufenden Fläche gleicher Temperatur steht, siehe Abbildung 1.11 Die *Fläche gleicher Temperatur* enthält all jene Punkte in der Umgebung von Q , die die gleiche Temperatur wie der Punkt Q aufweisen - man nennt sie deshalb auch *Isotherme*. Im Rahmen einer zweidimensionalen Darstellung, die man als einen Schnitt durch das Kontinuum in Q verstehen kann, sind diese Flächen durch die gekrümmten Linien veranschaulicht, siehe Abbildung 1.11 und 1.10. Das negative Vorzeichen in (1.34) besagt, dass der Vektor des Wärmestroms \mathbf{q} von 'Warm' nach 'Kalt' zeigt, was wir schon oben in Verbindung mit dem 2.Hauptsatz gefordert haben. Gemäß dem Stoffgesetz (1.34) zeigt dieser Vektor genau in die Richtung, in der die Temperaturänderung (von 'Warm' nach 'Kalt') maximal wird.

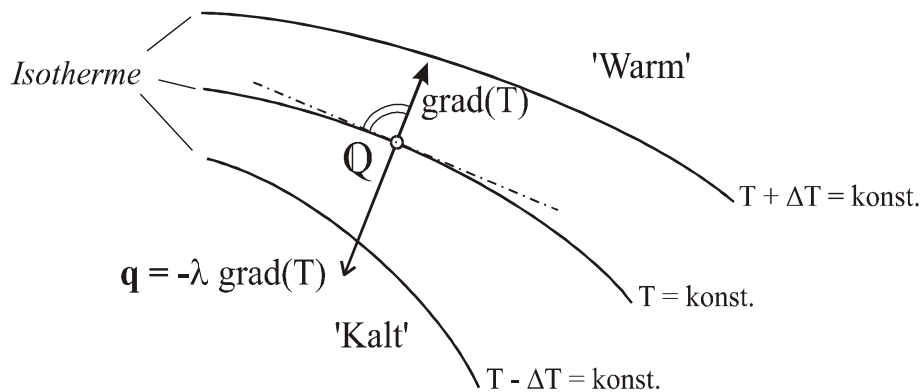


Abbildung 1.11: Gesetz von Fourier - graphische Darstellung

λ bezeichnet eine Materialeigenschaft, die *Wärmeleitfähigkeit*, die gemäß [4] auch von der Temperatur abhängen kann. Bei isotropem - also in alle Richtungen gleichbleibendem Materialverhalten - ist λ eine skalare Größe. Ein bezüglich der Wärmeleitfähigkeit anisotropes Material ist Holz: Die Leitfähigkeit quer zur Faser ist bei Holz wesentlich besser als in Faserrichtung. In diesem Falle muss λ durch einen Tensor 2.Stufe ersetzt werden.

1.4.2 Konvektiver Wärmeübergang

Bei dieser Form des Wärmeübergangs zwischen einem Festkörperkontinuum und seiner flüssigen (bzw. gasförmigen), bewegten Umgebung spielt neben der mikroskopischen Wärmeleitung die makroskopische Bewegung des Fluids (bzw. Gases) eine maßgebliche Rolle beim thermischen Energietransport. Für die in Abbildung 1.12 exemplarisch dargestellten Änderungen von Temperatur und Geschwindigkeit des umgebenden Mediums innerhalb einer *Grenzschicht*³¹ besteht ein differenzieller Zusammenhang, der auf einer Energiebilanz - dem 1.Hauptsatz - beruht³². Interessiert man sich lediglich für

³¹In diesem Zusammenhang sei auf die von Ludwig Prandtl (1875-1953) begründete *Grenzschichttheorie* hingewiesen. Diese ist ein Zweig der Strömungslehre, die sich mit Wärme und Stoffübertragung beschäftigt.

³²Ausführliche Herleitungen finden sich in [74].

den Wärmeübergang an den Begrenzungsflächen des untersuchten Festkörpers, so sind diese komplizierten Beziehungen auf eine einfache Gleichung reduzierbar:

$$q = \alpha (T - T^\infty) . \quad (1.35)$$

q bezeichnet hier den von der Begrenzungsfläche (Wand) an das umgebende Medium *abgegebenen Wärmestrom*; bzw. den *Betrag des Wärmestromvektors* im Punkt Q , siehe Abbildung 1.12.

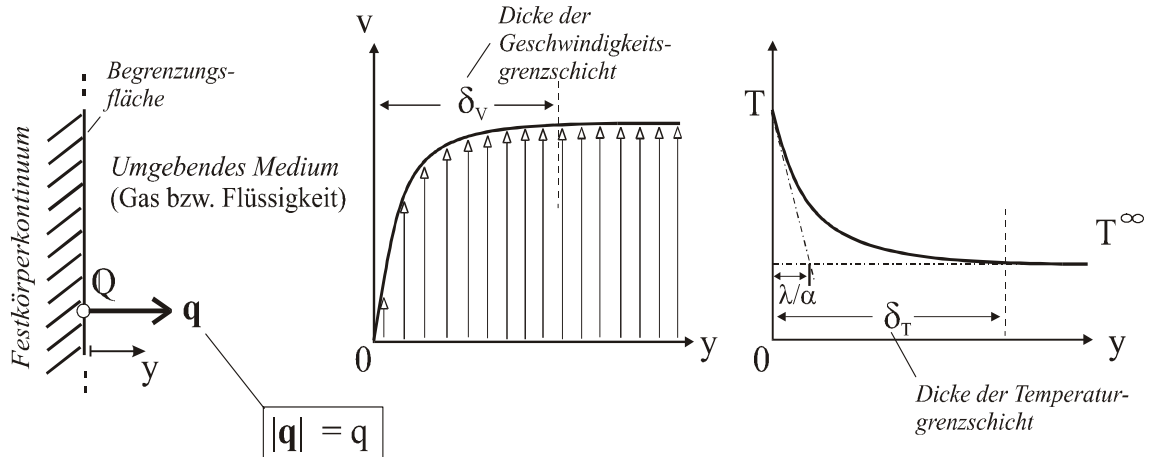


Abbildung 1.12: Verlauf der Strömungsgeschwindigkeit und der Temperatur eines strömenden Fluids als Funktion des Wandabstandes y gemäß [4]

Gemäß [74] besagt das *Stoffgesetz des konvektiven Wärmeübergangs* (1.35), dass der abgegebene Wärmestrom q proportional zur Differenz der Temperatur T an der Begrenzungsfläche und der Temperatur T^∞ des umgebenden Mediums in „genügend weiter Entfernung von der Wand ist“. Der *Wärmeübergangskoeffizient* α bezeichnet eine Größe, die nur im Rahmen einer ingenieurmäßigen Betrachtungsweise eine Konstante darstellt³³. Tatsächlich aber hängt α von einer Reihe von variablen Größen (Strömungsgeschwindigkeit v , Wandtemperatur T usw.) ab, worauf hier nicht detailliert eingegangen werden kann.

An dieser Stelle sei noch darauf hingewiesen, dass in unmittelbarer Wandnähe die Strömungsgeschwindigkeit v gegen Null geht, siehe Abbildung 1.12, weshalb hier ausschließlich ein Wärmeübergang durch Wärmeleitung stattfindet. Der übertragene Wärmestrom kann also in Wandnähe - bei bekannter Wärmeleitfähigkeit λ des umgebenden Mediums - auch mit (1.34) berechnet werden. Somit lässt sich nach kurzer Rechnung nachweisen, dass das Verhältnis λ/α bei bekannter Temperaturverteilung in der Grenzschicht berechenbar wird und von der Wandtemperatur T abhängt, siehe Abbildung 1.12. Da ein enges Verhältnis zwischen λ/α und der *Grenzschichtdicke* (δ_v bzw. δ_T) besteht, kann man des weiteren schließen:

³³So wird im Bauwesen üblicherweise mit konstanten Wärmeübergangskoeffizienten gerechnet, die je nach Anwendungsbereich zwischen $\alpha = 6$ bis $24 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ liegen, siehe hierzu Tafel 2.1 in [47].

- Dünne Grenzschichten, wie sie für hohe Strömungsgeschwindigkeiten und glatte Oberflächen charakteristisch sind, weisen auf große Werte für α - also *günstige Wärmeübergangsbedingungen* - hin.
- Niedrige Werte für α ergeben sich hingegen bei rauen Oberflächen und niedrigen Strömungsgeschwindigkeit des umgebenden Mediums.

1.4.3 Wärmestrahlung

Der von einem Körper an seine Umgebung durch Strahlung abgegebene Wärmestrom q hängt - wie auch bei Konvektion - maßgeblich von der Temperatur T an der jeweiligen Begrenzungsfläche ab.

Maximal wird der Betrag der abgestrahlten thermischen Energie für den '*schwarzen Körper*'. Bei der durch *elektromagnetische Wellen* an die Umgebung abgestrahlten Energie spielen die auftretenden Wellenlängen eine wichtige Rolle, was mit dem *Planckschen Strahlungsgesetz* in [47] beschrieben wird. Durch Integration über alle Wellenlängen ergibt sich das *Stefan-Boltzmansche Gesetz der Gesamtstrahlung für den 'schwarzen Körper'*:

$$q_S = \sigma T^4 \quad \text{bzw.} \quad q_S = C_S (T/100)^4 . \quad (1.36)$$

Die in (1.36) enthaltenen Größen σ und C_S sind Konstanten: $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$; $C_S = 5.67 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$.

Die von der Oberfläche eines *realen Körpers* emittierte Gesamtstrahlung q ist immer kleiner als die Strahlung des 'schwarzen Körpers' q_S , wobei das Verhältnis beider zueinander als *Emissionsgrad* ϵ bezeichnet wird:

$$\epsilon = q/q_S \quad \Rightarrow \quad q = \epsilon C_S (T/100)^4 . \quad (1.37)$$

Der Emissionsgrad ist keine Stoffkonstante, da er sowohl von der *Oberflächenbeschaffenheit*, als auch von der Temperatur³⁴ abhängt.

Mit dem Stoffgesetz (1.37)₂ kann der *strahlungsbedingte Wärmeübergang* für einen realen Körper berechnet werden, der Wärme lediglich abstrahlt (*emittiert*) nicht aber absorbiert (*immittiert*). Ein solcher Fall wird aber in der Realität kaum vorkommen, da jeder Körper aufgrund seiner Oberflächentemperatur T ($T \geq 0$) Wärme abstrahlt. Somit wird es in der Realität zum *Strahlungsaustausch* zwischen unterschiedlichen Körpern kommen, die Strahlung emittieren, absorbieren³⁵ und reflektieren. Die formelmäßige Erfassung der Wärmeübertragung für solche (gekoppelten, nicht-linearen) Prozesse, bei denen neben der Geometrie insbesondere die Temperatur der

³⁴Der Einfluss der Oberflächentemperatur T wird bei technischen Anwendungen häufig vernachlässigt; so wird für z.B. für Eisen (gemäß [47], Tafel 1.5) in einem Bereich von 0-100°C mit Epsilonwerten gerechnet, die je nach *Oberflächenbeschaffenheit* ('blank geätzt', 'geschmirgelt', 'stark verrostet') 0.16, 0.26 bzw. 0.85 betragen.

³⁵Emissionsgrad = Absorptionsgrad (*Kirchhoffsches Gesetz*).

beteiligten Körper eine maßgebliche Rolle spielt, ist aber sehr kompliziert, weshalb in diesem Zusammenhang meist numerische Lösungsmethoden wie die *Methode der Finiten Elemente* (FEM) zum Einsatz kommen werden.

Beispiel:

Für den Fall, dass sich zwei parallele, ebene Flächen gegenüberstehen, deren Abmessungen sehr groß gegenüber dem Abstand sind, kann der *Wärmeaustausch durch Strahlung* mit erträglichem Aufwand beschrieben werden. Gemäß [47] kann nämlich in diesem Fall der durch Strahlung übertragene Wärmestrom aus „der Differenz der von den Flächen jeweils absorbierten Strahlungsanteile“ berechnet werden. Für den Wärmestrom zwischen den beiden Flächen (von 1 nach 2) ergibt sich:

$$q_{12} = C_{12} \left[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4 \right] \quad \text{mit} \quad C_{12} = \frac{C_S}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1}. \quad (1.38)$$

Berücksichtigt man zusätzlich auch noch *konvektiven Wärmeübergang*, so berechnet sich mit (1.35) z.B. der von Fläche 1 abgegebene gesamte Wärmestrom folgendermaßen:

$$q = \underbrace{\alpha (T_1 - T^\infty)}_{\text{Konvektion}} + \underbrace{C_{12} \left[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4 \right]}_{\text{Strahlung}}. \quad (1.39)$$

Hierin bezeichnet T_1 die Oberflächentemperatur von Fläche 1, T_2 die Oberflächentemperatur von Fläche 2 und T^∞ die Gas- bzw. Fluidtemperatur in der Mitte zwischen den Flächen 1 und 2, siehe Abbildung 1.13.

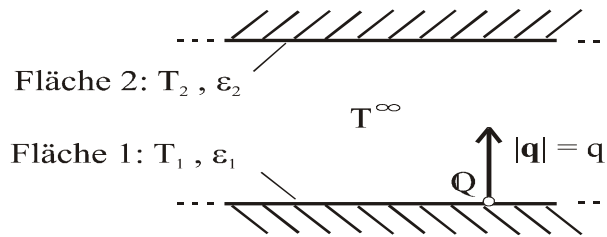


Abbildung 1.13: Wärmeübergang zwischen zwei parallelen, ebenen Flächen.

Um die Bedeutung der beiden Anteile aus Konvektion und Strahlung beim Wärmeübergang abschätzen zu können, wollen wir nun in (1.39) konkrete Zahlenwerte einsetzen. Wir stellen uns das folgende Problem aus der Praxis vor: Ein heißer Körper ($T_1 = 400K$) wird vor einen Körper mit Zimmertemperatur ($T_2 = 300K$) gestellt. Die gegenüberstehenden metallischen Flächen seien beide *geschmirgelt*; hieraus ergibt sich für beide ein Absorptionsgrad $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.26$. Zwischen beiden Körpern wird Luft bei Zimmertemperatur ($T^\infty = 300K$) mit *mäßiger Geschwindigkeit bewegt*; gemäß [43] ergibt sich dann der - näherungsweise konstante - Wärmeübergangskoeffizient zu $\alpha \approx 70 \frac{W}{m^2 K}$. Die Auswertung von (1.39) liefert somit den folgenden Wärmestrom q , ausgehend vom heißen Körper:

$$q = 7000.00 + 992.25 = 7992.25 \frac{W}{m^2}. \quad (1.40)$$

Für dieses Berechnungsbeispiel ist also der Anteil aus Konvektion bedeutend höher, als der aus Strahlung: Verhältnis etwa 7:1. Eine näherungsweise Vernachlässigung strahlungsbedingter Anteile beim Wärmeübergang wird also häufig zulässig sein.

Würde man die Temperatur des heißen Körpers jedoch weiter erhöhen ($T_1 = 600K$), so würde sich dieses Verhältnis zugunsten der Strahlungsanteile verändern. Es ergäbe sich ein Verhältnis von etwa 3:1. Ursache hierfür sind Nichtlinearitäten im Stoffgesetz für Wärmestrahlung. Hieraus lässt sich schließen, dass insbesondere bei sehr großen Temperaturunterschieden gegenüberstehender Körper der Einfluss der Strahlung beim Wärmeübergang mitberücksichtigt werden muss.

Abschließend soll an dieser Stelle noch auf einen - speziell im Bauwesen - besonders praxisrelevanten Fall von Wärmeübergang durch Strahlung hingewiesen werden: Die *thermische Belastung von Bauteilen durch Sonneneinstrahlung*. Um mit dem an der Oberfläche von Bauteilen auftretenden Wärmestrom q aus Sonneneinstrahlung rechnen zu können, existieren in der Literatur³⁶ überschlägige Berechnungsformeln, in die eine Vielzahl von Einflussgrößen Eingang findet. Hierzu zählen neben der Ausrichtung der jeweiligen Bauteiloberflächen, die Lage auf der Erdoberfläche, der Luftdruck, die Jahreszeit, der Sonnenstand usw. Für den Wärmestrom q infolge Sonneneinstrahlung werden dann bei konkreten Berechnungen - je nach Ausrichtung der Oberfläche - meist konstante Werte gesetzt

$$q = konst., \quad (1.41)$$

wodurch die Formulierung *thermischer Randbedingungen*³⁷ bei konkreten Berechnungen auf relativ einfachem Wege gelingt: Sind die Wärmeströme an den Begrenzungsflächen vorab bekannt, so sprechen wir allgemein von *Wärmestromrandbedingungen*.

Kommen in Zusammenhang mit dem Phänomen 'Wärmestrahlung' jedoch nichtlineare Stoffgesetze vom Typ (1.36)-(1.38) zum Einsatz, so wollen wir im Folgenden von *Strahlungsrandbedingungen* sprechen. Strahlungsrandbedingungen können - wie schon oben erwähnt - nur in Ausnahmefällen analytisch formuliert werden. Wie oben exemplarisch gezeigt, kann auf eine Berücksichtigung solcher Strahlungsrandbedingungen in der Praxis meist verzichtet werden, weshalb wir sie bei Schalenträgwerken in Abschnitt 4.3 auch nicht mehr explizit anschreiben wollen.

³⁶Siehe z.B. [47].

³⁷Siehe Abschnitt 4.3, Tabelle 4.1.

Kapitel 2

Die Grundgleichungen der Thermomechanik

Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist der dreidimensionale Euklidische Vektorraum, in dem ein *kartesisches* Koordinatensystem x^k ($k = 1, 2, 3$) mit einem festen Ursprung 0 eingeführt wird, siehe Abbildung 2.1. Man¹ bezeichnet die dazugehörige Basis \mathbf{e}_k dann als *orthonormiert*², sie ist von den jeweiligen Koordinaten x^k unabhängig. Das so definierte *Bezugssystem* wird im Sinne der 'klassischen Mechanik' als ein *Inertialsystem* bezeichnet, es ist unabhängig von der Zeit t . Je nach Geometrie des zu untersuchenden Körpers ist es sinnvoll, diesen durch ein zweites im Allgemeinen krummliniges Koordinatensystem θ^k auszumessen, - so macht es beispielsweise Sinn, für den in Abschnitt 7.2 behandelten Zylinder auf *Zylinderkoordinaten* überzugehen. Wir beziehen dieses Koordinatensystem θ^k auf die *Referenzgeometrie* im unverformten Ausgangszustand zur Zeit t_0 . Zwischen den beiden Koordinatensystemen existiere eine eindeutige, umkehrbare Transformation

$$x^k = x^k(\theta^1, \theta^2, \theta^3),$$

die das jeweilige krummlinige Koordinatensystem θ^k definiert.

Einem materiellen Punkt $\overset{+}{Q}$ im Ausgangszustand des Körpers, den wir als ein *Kontinuum*³ ansehen, kann man so feste Werte für θ^k zuordnen: Der *Orts-* bzw. *Richtungsvektor* dieses Punktes, siehe auch Abbildung 2.1, ergibt sich dann zu⁴

$$\overset{+}{\mathbf{R}}(\theta^k) = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = x^r(\theta^k) \mathbf{e}_r \quad (2.1)$$

Da sich die Werte für θ^k während einer vom Ausgangszustand ausgehenden Bewegung

¹Siehe [63], [64].

²Die Basisvektoren \mathbf{e}_k ($k = 1, 2, 3$) stehen senkrecht aufeinander und haben die Länge 1.

³Das *Modell des Kontinuums* ergibt sich gemäß [65], indem man „durch Abstrahierung von der atomistischen Strukturierung der stofflichen Materie [...] die Massenpunkte gewissermaßen als kontinuierlich (lückenlos) verschmiert betrachtet.“

⁴Gemäß der *Einsteinschen Summenkonvention* wird über gegenständige Indizes summiert: Bei kleinen lateinischen Buchstaben (z.B. k, r, s, \dots) von 1 bis 3, z.B: $A^k B_k = A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3$. Und bei kleinen griechischen Buchstaben (z.B. $\alpha, \beta, \gamma, \dots$) - wie sie in der Schalentheorie vorkommen - von 1 bis 2, z.B: $A^\alpha B_\alpha = A^1 B_1 + A^2 B_2$.

($\overset{+}{Q} \rightarrow Q$) nicht ändern, ist es sinnvoll, einen materiellen Punkt auch in einem beliebigen Momentanzustand zur Zeit t durch Angabe dieser Werte zu identifizieren: man spricht dann von einer *Lagrangeschen Beschreibungsweise*⁵. In diesem Sinne führen wir hier, siehe auch Abbildung 2.1, eine *lokale Basis* in jedem materiellen Punkt, sowohl im Ausgangs-, als auch im Momentanzustand ein:

$$\overset{+}{\mathbf{g}}_k = \frac{\partial \overset{+}{\mathbf{R}}}{\partial \theta^k} = \overset{+}{\mathbf{R}}_{,k} \quad ; \quad \mathbf{g}_k = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^k} = \mathbf{R}_{,k} = (\overset{+}{\mathbf{R}} + \mathbf{w})_{,k} . \quad (2.2)$$

Zur Unterscheidung zwischen den beiden in Abbildung 2.1 dargestellten Zuständen markieren wir die dem Ausgangszustand zugeordneten Größen mit einem aufgesetzten '+',

Die *kovarianten Basisvektoren* $\overset{+}{\mathbf{g}}_k$ und \mathbf{g}_k werden jeweils tangential an den θ^k -Linien errichtet. Das Zustandekommen dieser *Parameterlinien* soll hier exemplarisch für die θ^1 -Linie beschrieben werden: Würde man in einer Formulierung für den Richtungsvektor $\overset{+}{\mathbf{R}}(\theta^k)$ (bzw. $\mathbf{R}(\theta^k, t)$) die Koordinaten θ^2 und θ^3 des Punktes $\overset{+}{Q}$ (bzw. Q) festhalten und nur die θ^1 -Koordinate variieren, so würde die Spitze des Richtungsvektors die θ^1 -Linie im Ausgangszustand (bzw. Momentanzustand) beschreiben. Man kann sich also

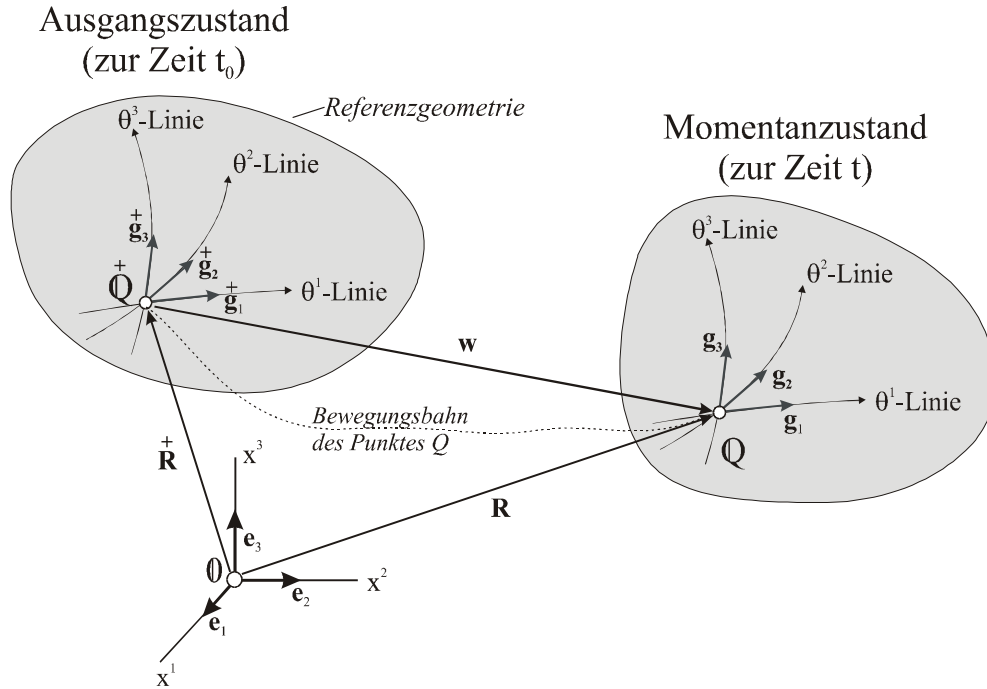


Abbildung 2.1: Kinematik des Kontinuums

den Körper durch ein Netz von Parameterlinien ausgemessen vorstellen, die sich bei einer Deformation mitverformen würden. Die Bezeichnung *konvektive* (also mitgehende) Koordinaten θ^k , in Zusammenhang mit einer Lagrangeschen Beschreibungsweise, ist somit einleuchtend.

⁵Siehe [64].

2.1 Die Anwendung des 1.Hauptsatzes auf ein Volumenelement

Wie schon zu Beginn von Abschnitt 1.1 angesprochen, werden wir hier - im Rahmen einer *lokalen Betrachtung* - ein zu einem materiellen Punkt Q gehörendes infinitesimal kleines Volumenelement als ein thermodynamisches System auffassen. Während der Zeit Dt wird dieses System einer *infinitesimalen Zustandsänderung* ($\mathbf{Mz} \rightarrow \mathbf{Mz}^*$) unterworfen, siehe Abbildung 2.2. In einem ersten Schritt werden wir für diese Zustandsänderung den 1.Hauptsatz formulieren, wobei neben den durch Arbeit und Wärme zugeführten Energiebeiträgen, auch die äußeren Energieformen explizit berechnet werden. Durch Anwendung der Bilanzgleichung (1.10) gelingt dann die Berechnung der inneren Energieänderung im Volumenelement. Anschließend wird die *Invarianzforderung* aus Abschnitt 1.2 auf die infinitesimale Zustandsänderung angewandt, wodurch die *Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik* (Massen-, Impuls-, Drallerhaltung) abgeleitet werden können.

All diese Überlegungen führen zur Einführung einer Reihe von lokalen physikalischen Eigenschaften, die man von der 'Größe' des Systems unabhängig machen kann. Hierzu gehören z.B. die Verzerrungen, Spannungen, Wärmeströme und die spez. innere Energie $u = U/dm$. Innerhalb eines homogenen Kontinuums sind diese Systemeigenschaften gemäß [65] dann *stetige Funktionen des Ortes und der Zeit*, also *Feldgrößen*: z.B. $u(\theta^k, t)$. Die aus dem 1.Hauptsatz abgeleiteten Erhaltungsgleichungen ((2.33), (2.39) und (2.43)) bezeichnet man folglich als *Feldgleichungen*; das sind partielle Differenzialgleichungen, die für jeden materiellen Punkt innerhalb des Kontinuums gültig sind.

2.1.1 Energiezufuhr durch Arbeit

Wie wir in Abschnitt 1.2.1 festgestellt haben, fließt einem System mechanische Energie aus seiner Umgebung zu, wenn ein an seiner Systemgrenze angreifender Kraftvektor verschoben wird. Während der infinitesimalen Zustandsänderung ($\mathbf{Mz} \rightarrow \mathbf{Mz}^*$, Abbildung 2.2) leisten also alle der an den Schnittflächen des Volumenelementes angreifenden Kräfte Arbeit, die mit (1.13) berechnet werden kann.

Aus Übersichtsgründen sind nur die Schnittkräfte in Richtung der θ^1 -Linie angetragen. Für den am 'negativen Schnittufer' (im Punkt 1) angreifenden Kraftvektor $-d\mathbf{p}^1$ mit dem zugeordneten Verschiebungsvektor $D\mathbf{w}_1$ ergibt sich dann die geleistete Arbeit zu $-d\mathbf{p}^1 D\mathbf{w}_1$. Addiert man hierzu noch die Arbeit am 'positiven Schnittufer', so erhält man für die Schnittkräfte in 1-Richtung:

$$D\overset{1}{W} = -d\mathbf{p}^1 D\mathbf{w}_1 + \left(d\mathbf{p}^1 + d\mathbf{p}_{,1}^1 d\theta^1 \right) D\mathbf{w}_{1'} . \quad (2.3)$$

Bezüglich der Langrange-Koordinaten θ^1 , θ^2 und θ^3 des materiellen Punktes Q können

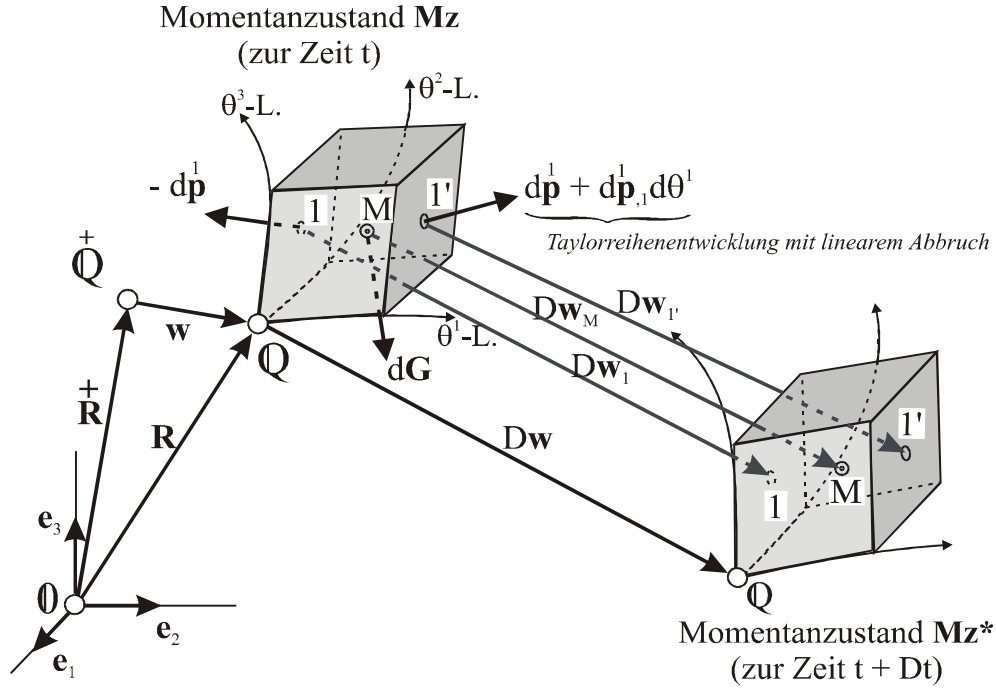


Abbildung 2.2: Infinitesimale Zustandsänderung ($\mathbf{Mz} \rightarrow \mathbf{Mz}'$) am Volumenelement

die Koordinaten der Kraftangriffspunkte folgendermaßen angegeben werden:

$$\text{Punkt 1: } \theta^1, \theta^2 + \frac{d\theta^2}{2}, \theta^3 + \frac{d\theta^3}{2}; \quad \text{Punkt 1': } \theta^1 + d\theta^1, \theta^2 + \frac{d\theta^2}{2}, \theta^3 + \frac{d\theta^3}{2}. \quad (2.4)$$

Unter Beachtung von (2.4) lassen sich die Verschiebungen der Kraftangriffspunkte in *Taylorreihen* entwickeln, so gilt beispielsweise:

$$D\mathbf{w}_1 = D\mathbf{w} + D\mathbf{w}_{,2} \frac{d\theta^2}{2} + D\mathbf{w}_{,3} \frac{d\theta^3}{2}. \quad (2.5)$$

Dann gelingt es, die Verschiebungen der jeweiligen Kraftangriffspunkte am Volumenelement (1, 1', M usw.) durch die Verschiebung bzw. Verschiebungsableitungen des Punktes Q auszudrücken. Nach Streichen von Termen, die *von höherer Ordnung klein* sind, verbleibt so für die Arbeit der Schnittkräfte in 1-Richtung:

$$D\dot{W} = d\mathbf{p}^1 \cdot D\mathbf{w}_{,1} d\theta^1 + d\mathbf{p}_{,1}^1 d\theta^1 \cdot D\mathbf{w} \quad (2.6)$$

Die gesamte, dem Volumenelement während Dt über die Begrenzungsflächen zugeführte Arbeit DW ergibt sich, wenn man zu $D\dot{W}$ noch die Arbeitsanteile der in den Begrenzungsflächen längs der θ^2 - und θ^3 -Linie wirkenden Kräfte hinzu addiert. Diese Arbeitsanteile ($D\dot{W}^2, D\dot{W}^3$) können analog zu (2.6) - durch vertauschen der Indizes - berechnet werden. Dann gilt:

$$\begin{aligned} DW &= D\dot{W}^1 + D\dot{W}^2 + D\dot{W}^3 \\ DW &= d\mathbf{p}^1 \cdot D\mathbf{w}_{,1} d\theta^1 + d\mathbf{p}^2 \cdot D\mathbf{w}_{,2} d\theta^2 + d\mathbf{p}^3 \cdot D\mathbf{w}_{,3} d\theta^3 + \\ &\quad + \left(d\mathbf{p}_{,1}^1 d\theta^1 + d\mathbf{p}_{,2}^2 d\theta^2 + d\mathbf{p}_{,3}^3 d\theta^3 \right) \cdot D\mathbf{w}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nachfolgend werden die am Volumenelement angreifenden äußeren Kräfte auf die ihnen zugeordneten 'nicht-physikalischen' Flächen $d\overset{+}{A}_k$ des Ausgangszustandes bezogen und in Richtung der Basisvektoren \mathbf{g}_k zerlegt:

$$d\overset{+}{\mathbf{p}}^1 = \tau^{1k} d\overset{+}{A}_1 \mathbf{g}_k; \quad d\overset{+}{\mathbf{p}}^2 = \tau^{2k} d\overset{+}{A}_2 \mathbf{g}_k; \quad d\overset{+}{\mathbf{p}}^3 = \tau^{3k} d\overset{+}{A}_3 \mathbf{g}_k. \quad (2.8)$$

In diesem Zusammenhang nennt man gemäß [19] die Größe τ^{ik} den *2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor*. Die 'nicht-physikalischen' Flächen berechnen sich dann zu

$$d\overset{+}{A}_1 = \sqrt{\overset{+}{g}} d\theta^2 d\theta^3, \quad d\overset{+}{A}_2 = \sqrt{\overset{+}{g}} d\theta^1 d\theta^3, \quad d\overset{+}{A}_3 = \sqrt{\overset{+}{g}} d\theta^1 d\theta^2, \quad (2.9)$$

wobei $\overset{+}{g}$ die Determinante des *Metrikensors*⁶ $\overset{+}{g}_{ik}$ der unverformten Konfiguration (im Ausgangszustand) ist:

$$\overset{+}{g} = \det(\overset{+}{g}_{ik}) \quad \text{mit} \quad \overset{+}{g}_{ik} = \overset{+}{\mathbf{g}}_i \cdot \overset{+}{\mathbf{g}}_k. \quad (2.10)$$

Analog hierzu berechnen sich die Größen g und g_{ik} im Momentanzustand:

$$g = \det(g_{ik}) \quad \text{mit} \quad g_{ik} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_k. \quad (2.11)$$

Die Metrikensoren $\overset{+}{g}_{ik}$ bzw. g_{ik} enthalten Informationen über die Geometrie des Volumenelementes im Ausgangs- bzw. Momentanzustand, man spricht in diesem Zusammenhang auch von den *Maßzahlen*: $\overset{+}{g}_{11}$, $\overset{+}{g}_{12}$, ..., $\overset{+}{g}_{33}$. Gleiches gilt natürlich auch für den Metrikensor g_{ik} des Momentanzustandes, der die Maßzahlen der verformten Geometrie enthält.

Durch Einsetzen von (2.8/9) in (2.7) und Division durch Dt erhält man schließlich eine Formulierung für die am Volumenelement - pro differentieller Zeitspanne Dt - verrichteten Arbeit:

$$\dot{W} = \tau^{ik} \mathbf{g}_k \cdot \dot{\mathbf{w}}_{,i} d\overset{+}{V} + \left(\tau^{ik} \mathbf{g}_k \sqrt{\overset{+}{g}} \right)_{,i} \cdot \dot{\mathbf{w}} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \quad \text{mit} \quad d\overset{+}{V} = \sqrt{\overset{+}{g}} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3. \quad (2.12)$$

2.1.2 Energiezufuhr durch Wärme

Im Laufe der oben beschriebenen infinitesimalen Zustandsänderung soll dem Volumenelement neben mechanischer auch thermische Energie aus seiner Umgebung zugeführt werden. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von Wärmeaustausch bzw. -übertragung. Während der Zeit Dt fließt dem System (gemeint ist hier das Volumenelement) zum einen Wärme über seine Begrenzungsflächen zu, zum anderen soll auch der Fall betrachtet werden, dass die Wärme DH direkt ins Innere des Volumenelementes transportiert wird.

In Abbildung 2.3 sind neben der Wärmezufuhr DH lediglich die über die Flächen in 1-Richtung zugeführten Wärmemengen eingezeichnet. Für die restlichen Flächen ergeben

⁶Streng genommen bezeichnen solche indizierten Größen (z.B. τ^{ik} , $\overset{+}{g}_{ik}$, g_{ik}) keine Tensoren, sondern *Tensorkoordinaten*; trotzdem werden wir sie hier - der Einfachheit halber - als Tensoren bezeichnen. Siehe hierzu auch [64].

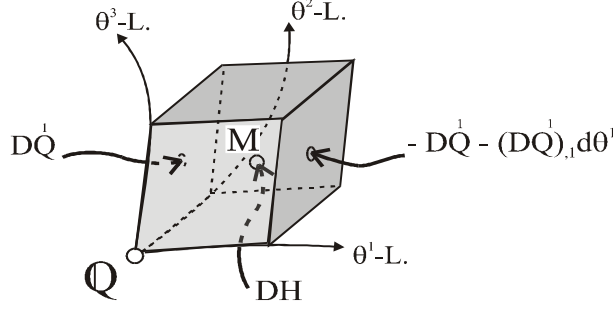


Abbildung 2.3: Wärmezufuhr Volumenelement während Dt

sich die zugeordneten Anteile wieder durch Vertauschen der Indizes, was dann auf die folgende Beziehung für die (gesamte) dem Volumenelement während Dt zugeführte Wärme führt:

$$DQ = - \left(D\dot{Q}^1 \right)_{,1} d\theta^1 - \left(D\dot{Q}^2 \right)_{,2} d\theta^2 - \left(D\dot{Q}^3 \right)_{,3} d\theta^3 + DH . \quad (2.13)$$

Bei Einführung von *Wärmeströmen* h^k , die auf 'nicht-physikalische' Flächen des Ausgangszustandes bezogen sind,

$$\dot{Q}^1 = h^1 d\dot{A}_1, \quad \dot{Q}^2 = h^2 d\dot{A}_2, \quad \dot{Q}^3 = h^3 d\dot{A}_3, \quad (2.14)$$

und einer *Wärmequelle* h , die auf die Masse dm des Volumenelementes bezogen ist,

$$\dot{H} = h dm \quad \text{mit} \quad dm = \rho \underbrace{\sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3}_{=dV}, \quad (2.15)$$

kann man (2.13) nach Division durch Dt auf die folgende Form bringen:

$$\dot{Q} = - \left[\left(h^k \sqrt{g} \right)_{,k} - h \rho \sqrt{g} \right] d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 . \quad (2.16)$$

Wie wir in Abschnitt 1.2.2 gesehen haben, kommt es bei Zufuhr von Wärme auch immer zu einer Änderung der Zustandsgröße *Entropie* in einem System (hier das Volumenelement). Diese Änderung beruht zum einen auf 'Irreversibilitäten' im Inneren $\overset{IR}{D\dot{S}}$, und zum anderen auf reversibler Entropiezufuhr $\overset{RE}{D\dot{S}}$ aus der Umgebung, die in direktem Zusammenhang mit der zugeführten Wärme steht. Wenden wir nun diesen Zusammenhang, der mit (1.17) beschrieben wird, auf die über die Seitenflächen zugeführten Entropieanteile $\overset{k}{D\dot{S}}$, und die direkt ins Innere transportierte Entropie $D\dot{S}_H$ an,

$$D\dot{S}^1 = \frac{D\dot{Q}^1}{T}, \quad D\dot{S}^2 = \dots, \quad D\dot{S}_H = \frac{DH}{T}, \quad (2.17)$$

so lässt sich analog zu (2.13) die *reversibel von außen zugeführte Entropie* berechnen:

$$\overset{RE}{D\dot{S}} = - \left(\frac{D\dot{Q}^1}{T} \right)_{,1} d\theta^1 - \left(\frac{D\dot{Q}^2}{T} \right)_{,2} d\theta^2 - \left(\frac{D\dot{Q}^3}{T} \right)_{,3} d\theta^3 + \frac{DH}{T} . \quad (2.18)$$

Nach Division durch Dt ergibt sich dann unter Beachtung von (2.14/15):

$$\dot{\overset{RE}{S}} = - \left[\left(\frac{h^k \sqrt{g^+}}{T} \right)_{,k} - \frac{h \rho \sqrt{g}}{T} \right] d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3, \quad (2.19)$$

die zeitliche Änderung der Entropie, die auf Wärmeaustausch mit der Umgebung beruht. Teilt man $\dot{\overset{RE}{S}}$ durch die Systemmasse dm , so erhält man eine spezifische Größe:

$$\dot{\overset{RE}{s}} = \dot{\overset{RE}{S}}/dm, \quad (2.20)$$

die *spezifische Entropieströmung* im Kontinuum.

2.1.3 Innere und äußere Energie

Mit Blick auf die aus dem 1.Hauptsatz resultierende Bilanzgleichung (1.10) benötigen wir nun noch zur Berechnung der inneren Energie die Änderungen der äußeren Energieformen (DE_{pot}, DE_{kin}). Diese, den *äußeren Zustand* eines Körpers beschreibenden Energieformen, hängen, wie oben schon mehrfach bemerkt, von sogenannten *äußeren Koordinaten* eines Systems ab. Hierzu gehören neben den *Lagekoordinaten* auch die *Geschwindigkeitskoordinaten des Schwerpunktes*⁷ M bezüglich des Ursprungs 0. In der Starrkörpermechanik - wo die innere Energie unberücksichtigt bleibt - ist die Kenntnis dieser Koordinaten ausreichend für eine vollständige Beschreibung der Zustandsgröße *Energie*.

Die Änderung der potenziellen Energie resultiert aus Lageänderungen eines Körpers innerhalb eines konservativen Kraftfeldes. Greift, wie in Abbildung 2.2 dargestellt, im Mittelpunkt (=Schwerpunkt) unseres Systems die als konservativ angesetzte Kraft $d\mathbf{G}$ an, so lässt sich gemäß [66] die Änderung der potenziellen Energie aus der 'Arbeit' berechnen, die diese Kraft auf ihrem Verschiebungsweg leistet. Es gilt:

$$DE_{pot} = -d\mathbf{G} \cdot D\mathbf{w}_M \quad \text{bzw.} \quad \dot{\overset{RE}{E}}_{pot} = -d\mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{w}}_M. \quad (2.21)$$

Dieser Zusammenhang kann an einem einfachen Beispiel veranschaulicht werden: Senkt man einen Körper mit der Masse m in einem Gravitationsfeld um die Strecke Δh - in Richtung der Wirkungsrichtung der Gewichtskraft vom Betrag G - ab, so berechnet sich die Änderung der potenziellen Energie zu $-G \Delta h$.

Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, dass im Inneren angreifende Kräfte keine Arbeit am System (hier Volumenelement) leisten. Denn unter *Arbeit* verstehen wir hier eine *mechanische Energiezufuhr aus der Umgebung*, die über die Systemgrenzen stattfinden muss, also nur durch (äußere) Kräfte hervorgerufen werden

⁷Ist die Lage des Mittelpunktes M , siehe Abbildung 2.1, durch den Richtungsvektor $\mathbf{R}_M = x_M^k \mathbf{e}_k$ vorgegeben, so bezeichnen die x_M^k ($k = 1, 2, 3$) die *Lagekoordinaten* und die \dot{x}_M^k die *translatorischen Geschwindigkeitskoordinaten*.

kann, die an den Begrenzungsflächen angreifen. Eine im Inneren angreifende Kraft - wie die Gravitationskraft - leistet auf ihrem Verschiebungsweg also keine Arbeit am System, sondern bewirkt lediglich eine Änderung der Zustandsgröße E_{pot} !

Im Folgenden wird die Kraft $d\mathbf{g}$ auf die Masse dm bezogen und in Richtung der Basisvektoren \mathbf{g}_k zerlegt:

$$d\mathbf{G} = G^k \mathbf{g}_k dm . \quad (2.22)$$

Wie man sich am Beispiel eines Gravitationsfeldes überlegen kann, ist die Einführung eines massenbezogenen Vektorfeldes $G^k \mathbf{g}_k$ sinnvoll und führt bei Einsetzen von (2.22) in (2.21) auf eine *extensive* - also massenbezogene Energieform. Die äußeren Energieformen (E_{pot} , E_{kin}) sind - wie schon in Abschnitt 1.2 vermerkt - extensive Zustandsgrößen.

Bezüglich der Lagrange-Koordinaten des materiellen Punktes Q , siehe Abbildung 2.2, kann der Mittelpunkt M folgendermaßen lokalisiert werden:

$$\text{Punkt } M : \theta^1 + \frac{d\theta^1}{2}, \theta^2 + \frac{d\theta^2}{2}, \theta^3 + \frac{d\theta^3}{2} . \quad (2.23)$$

Dann ergibt sich für den Verschiebungsvektor $D\mathbf{w}_M$ die folgende Taylorreihenentwicklung:

$$D\mathbf{w}_0 = D\mathbf{w} + D\mathbf{w}_{,1} \frac{d\theta^1}{2} + D\mathbf{w}_{,2} \frac{d\theta^2}{2} + D\mathbf{w}_{,3} \frac{d\theta^3}{2} . \quad (2.24)$$

Mit der *kinetischen Energie*⁸ $E_{kin} = \frac{1}{2} \int_m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dm$ erhält man für das in Abbildung 2.2 dargestellte, infinitesimal kleine Volumenelement:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{w}}_M \cdot \dot{\mathbf{w}}_M dm . \quad (2.25)$$

Die kinetische Energie, die hier keine rotatorischen Anteile besitzt, wird auf den - als ruhend gedachten - Ursprung des Euklidischen Vektorraumes 0 bezogen. Die zeitliche Änderung dieser extensiven Zustandsgröße berechnet sich zu:

$$\dot{E}_{kin} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{w}}_0 \cdot \dot{\mathbf{w}}_0 dm)^\bullet . \quad (2.26)$$

Die zeitliche Änderung der äußeren Energieformen erhält man dann nach einigen Umformungen (mit (2.15)₂, (2.21), (2.22), (2.24) und (2.26)) und nach Streichen von Termen, die *von höherer Ordnung klein* sind zu:

$$\dot{E}_{pot} + \dot{E}_{kin} = \left[\ddot{\mathbf{w}} \rho \sqrt{g} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{w}} (\rho \sqrt{g})^\bullet - G^k \mathbf{g}_k \rho \sqrt{g} \right] \cdot \dot{\mathbf{w}} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 . \quad (2.27)$$

(2.27) bezeichnet die zeitliche Änderung des *Starrkörperanteils* in der Zustandsgröße Energie.

Die *zeitliche Änderung der inneren Energie* kann dann mit (1.10) berechnet werden. Sie ergibt sich aus den zugeführten Energieformen (Wärme und Arbeit) abzüglich der

⁸Siehe z.B. [66].

Starrkörperanteile. Unter Beachtung von (2.12) folgt dann aus dem 1.Hauptsatz:

$$\begin{aligned}
\dot{U} &= \dot{W} + \dot{Q} - \dot{E}_{pot} - \dot{E}_{kin} \\
&= \left[\left(\tau^{ik} \mathbf{g}_k \sqrt{g}^+ \right)_{,i} + G^k \mathbf{g}_k \rho \sqrt{g} - \ddot{\mathbf{w}} \rho \sqrt{g} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{w}} \left(\rho \sqrt{g} \right)^{\cdot} \right] \cdot \dot{\mathbf{w}} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 + \\
&\quad + \tau^{ik} \mathbf{g}_k \cdot \dot{\mathbf{w}}_{,i} dV^+ + \dot{Q}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Über die Formulierung (2.28) gehen in \dot{U} noch Größen - wie $\dot{\mathbf{w}}$ - ein, die auch bei der Beschreibung zeitlicher Änderungen der äußeren Energieformen zum Einsatz kommen, siehe (2.27). Diese, den äußeren Zustand beschreibende Größen, sind *nicht-objektiv*, sie hängen also vom Bezugssystem ab und werden durch Starrkörperbewegungen beeinflusst. Die Elimination dieser Größen in \dot{U} gelingt durch Anwendung der in Abschnitt 1.2 formulierten *Invarianzforderung*, die hier noch einmal - in anderen Worten - angeschrieben wird:

Überlagert man einer ursprünglichen Zustandsänderung, die eine Änderung der inneren Energie um DU zur Folge hat, eine reine Starrkörperbewegung, so hat dies keinen Einfluss auf DU .

Hieraus lässt sich folgern, dass die Zunahme der inneren Energie DU bei der in Abbildung 2.2 dargestellten infinitesimalen Zustandsänderung identisch sein muss mit der inneren Energiezunahme $D\underline{U}$, die sich ergeben würde, wenn man die Zustandsänderung (bzw. Bewegung) mit einer reinen Starrkörperbewegung überlagern würde:

$$DU = D\underline{U} \quad \text{bzw.} \quad \dot{U} = \dot{\underline{U}} \tag{2.29}$$

Wie wir im nachfolgenden Abschnitt sehen werden, führt dieser Weg nicht nur zu einer Formulierung für \dot{U} , die nur noch vom inneren Zustand des Volumenelementes abhängt, sondern auch zu den *Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik* (Massen-, Impuls- und Drallerhaltung), die sich direkt aus der Invarianzforderung (2.29) ableiten lassen.

2.1.4 Erhaltungsgleichungen der Thermomechanik

Die zu überlagernde *Starrkörperbewegung* sei zusammengesetzt aus einer *Starrkörpertranslation* \mathbf{v}_0 und einer *Starrkörperrotation* $\boldsymbol{\omega}_0$. Vergleicht man die ursprüngliche mit der überlagerten Bewegung in Abbildung 2.4, so erhält man für die Verschiebung des Punktes Q :

$$\begin{aligned}
&\text{- ursprüngliche Bewegung:} \quad D\mathbf{w} \\
&\text{- überlagerte Bewegung:} \quad D\underline{\mathbf{w}} = D\mathbf{w} + \mathbf{v}_0 Dt + (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{R}) Dt.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

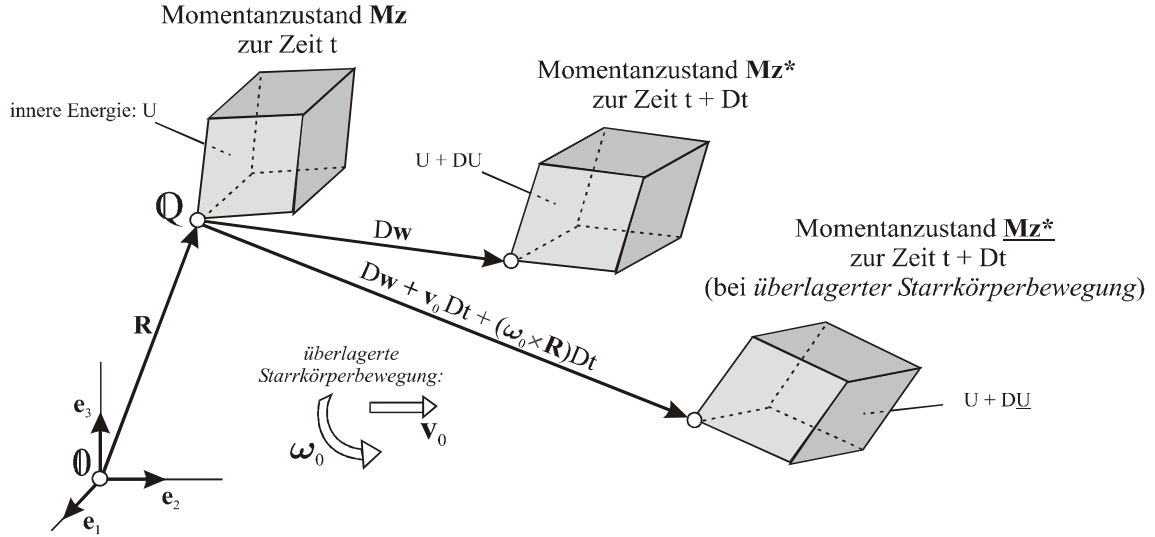


Abbildung 2.4: überlagerte Starrkörperbewegung

Größen, in denen die überlagerte Bewegung 'enthalten' ist, werden im Folgenden unterstrichen dargestellt.

In einem ersten Schritt soll nun die Invarianzforderung (2.29) auf die Überlagerung der Bewegung mit einer beliebigen *Starrkörpertranslation* ($\dot{\underline{\mathbf{w}}} = \dot{\underline{\mathbf{w}}} + \mathbf{v}_0$) angewandt werden. Da diese von Ort und Zeit unabhängig ist, gilt:

$$\left(\dot{\underline{\mathbf{w}}} + \mathbf{v}_0\right)_{,i} = \dot{\underline{\mathbf{w}}}_{,i} \quad \text{und} \quad \left(\dot{\underline{\mathbf{w}}} + \mathbf{v}_0\right)^{\bullet} = \ddot{\underline{\mathbf{w}}} \quad (2.31)$$

Somit kann man aus (2.29)₂ unter Beachtung von (2.28)₂ die folgende Forderung ableiten,

$$\left[\left(\tau^{ik} \mathbf{g}_k \sqrt{g^+} \right)_{,i} + G^k \mathbf{g}_k \rho \sqrt{g} - \ddot{\underline{\mathbf{w}}} \rho \sqrt{g} - \dot{\underline{\mathbf{w}}} (\rho \sqrt{g})^{\bullet} \right] \cdot \mathbf{v}_0 - \underbrace{\frac{1}{2} (\rho \sqrt{g})^{\bullet}} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \quad (2.32)$$

die für vollkommen beliebige \mathbf{v}_0 nur dann erfüllt werden kann, wenn die beiden unterklammerten Ausdrücke unabhängig voneinander verschwinden:

$$\begin{aligned} (\rho \sqrt{g})^{\bullet} = 0 &\implies \rho \sqrt{g} = \overset{+}{\rho} \sqrt{g^+} \implies dm = \overset{+}{dm} \quad (\text{Massenerhaltung}); \\ \left(\tau^{ik} \mathbf{g}_k \sqrt{g^+} \right)_{,i} + G^k \mathbf{g}_k \overset{+}{\rho} \sqrt{g^+} &= \ddot{\underline{\mathbf{w}}} \overset{+}{\rho} \sqrt{g^+} \quad (\text{Impulserhaltung}). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Die Impulserhaltungsgleichung kann nun nach Multiplikation mit $d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3$ und unter Beachtung von (2.8/9) und (2.22) auf die folgende Form gebracht werden:

$$\left(d\overset{+}{\mathbf{p}}_{,1} d\theta^1 + d\overset{+}{\mathbf{p}}_{,2} d\theta^2 + d\overset{+}{\mathbf{p}}_{,3} d\theta^3 \right) + d\mathbf{G} = \ddot{\underline{\mathbf{w}}} \overset{+}{dm}. \quad (2.34)$$

Die Summe aller am Volumenelement angreifenden Kraftvektoren muss also gleich einem Vektor $\ddot{\underline{\mathbf{w}}} \overset{+}{dm}$ sein, der bei konstanter Masse mit der zeitlichen Änderung des

Impulses $\dot{d}\mathbf{i} = (\dot{\mathbf{w}}dm)^{\bullet}$ identisch ist. Durch Einführung einer zusätzlichen, am Volumenelement angreifenden Kraft $-\ddot{\mathbf{w}}^+ dm$, die üblicherweise als *Trägheitskraft* bezeichnet wird, kann also auch im Falle einer beschleunigten Bewegung das Volumenelement im *dynamischen Kräftegleichgewicht* gehalten werden: Das heißt, die Summe aller angreifenden Kräfte muss sich dann zu Null ergeben.

Unter Beachtung von (2.33) vereinfacht sich der 1.Hauptsatz der Thermodynamik (2.28) und es verbleibt:

$$\dot{U} = \underbrace{\tau^{ik} \mathbf{g}_k \cdot \dot{\mathbf{w}}_{,i} dV^+}_{\dot{\mathcal{W}} = \dot{W} - \dot{E}_{pot} - \dot{E}_{kin}} + \dot{Q}. \quad (2.35)$$

Die unterklammerten Terme in (2.35) bezeichnen die zeitliche Änderung der inneren mechanischen Energie. Man nennt diesen Term $(\dot{\mathcal{W}})$ auch die *Spannungsleistung* oder die *Formänderungsleistung*.

In einem zweiten Schritt wollen wir die Invarianzforderung auf die Überlagerung der ursprünglichen Bewegung mit einer reinen *Starrkörperrotation* ($\dot{\underline{\mathbf{w}}} = \dot{\mathbf{w}} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{R}$) anwenden. Diese hat lediglich Einfluss auf die Größe $\dot{\mathbf{w}}_{,i}$ in (2.35). Vergleicht man nun die ursprüngliche mit der überlagerten Bewegung, so ergibt sich unter Beachtung von (2.2)₂ und $\boldsymbol{\omega}_0 = konst.:$

$$\begin{aligned} - \text{ursprüngliche Bewegung: } \dot{\mathbf{w}}_{,i} &= \dot{\mathbf{g}}_i \\ - \text{überlagerte Bewegung: } \dot{\underline{\mathbf{w}}}_{,i} &= \dot{\mathbf{g}}_i + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{g}_i = \dot{\underline{\mathbf{g}}}_i. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Aus der Invarianzforderung (2.29)₂ lässt sich dann mit (2.35) und (2.36) die folgende Forderung ableiten:

$$\tau^{ik} \mathbf{g}_k \cdot \dot{\mathbf{g}}_i = \tau^{ik} \mathbf{g}_k \cdot \dot{\underline{\mathbf{g}}}_i. \quad (2.37)$$

In Anhang A wird ausführlich gezeigt, wie man unter Nachweis der Invarianz (bzw. Objektivität) des Metriktensors - und der darin enthaltenen Maßzahlen - ,

$$\dot{g}_{ik} = \dot{\underline{g}}_{ik}, \quad (2.38)$$

zeigen kann, dass die Forderung (2.37) für beliebige $\boldsymbol{\omega}_0$ genau dann erfüllt werden kann, wenn der Spannungstensor τ^{ik} symmetrisch ist:

$$\tau^{ik} = \tau^{ki}. \quad (2.39)$$

Die Forderung nach *Symmetrie des Spannungstensors* ist aber gemäß [26] identisch mit der Forderung nach *Drallerhaltung am Volumenelement*. Da sich die zeitliche Änderung des Dralls für ein infinitesimal kleines Volumenelement zu Null ergibt ($d\dot{\mathbf{j}} = 0$), folgt:

$$\tau^{ik} \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_k \sqrt{g^+} = 0 \quad (\text{Drallerhaltung}). \quad (2.40)$$

Gleichung (2.40) kann aus der Summe aller am Volumenelement angreifenden Momente abgeleitet werden - man spricht in diesem Zusammenhang vom *Momentengleichgewicht*. Als ein Moment bezeichnen wir in diesem Zusammenhang das Kreuzprodukt eines Kraft- und eines Abstandsvektors bezüglich eines Bezugspunktes - hier beispielsweise der Mittelpunkt M .

Anmerkungen zur Invarianzforderung:

Dass die Massenerhaltung in unserer Formulierung für den 1. Hauptsatz 'enthalten' ist, ist nicht verwunderlich, weil dieser in Abschnitt 1.2 für *geschlossene* Systeme formuliert wird, bei denen definitionsgemäß Massenströme über die Systemgrenzen ausgeschlossen sind. Bemerkenswert ist jedoch das Zustandekommen der Prinzipien der Impuls- und Drallenerhaltung, die üblicherweise in der Mechanik postuliert werden müssen.

Es sei allerdings in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, dass wir in den vorangegangenen Überlegungen bereits

1. die *Arbeit* als 'Kraft mal Weg' kennengelernt
2. *Schnittgrößen* eingeführt und
3. Formulierungen für die *potenzielle* und die *kinetische Energie* als bekannt vorausgesetzt haben.

So wäre beispielsweise ohne eine Kenntnis der kinetischen Energie (2.25) der hier beschrittene Weg nicht möglich. Trotzdem ist dieser von Krätzig in [42] ursprünglich im Rahmen einer *globalen Formulierung*⁹ aufgezeigte Weg von Interesse, da gezeigt werden kann, dass die Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik nicht nur mit dem 1. Hauptsatz kompatibel sind, sondern dass man diese zwingend fordern muss, um die *Objektivität der inneren Energie* und damit ihre *Unabhängigkeit von einer Starrkörperbewegung* nachweisen zu können.

Abschließend wollen wir nun noch die dem Spannungstensor τ^{ik} (energetisch) zugeordneten Verformungsgröße $\dot{\Gamma}_{ik}$ - die *Verzerrungen* - einführen. Hierzu betrachten wir die Formänderungsleistung $\dot{\mathcal{W}}$ in (2.35). Diese kann man¹⁰ unter Beachtung der Symmetrie des Spannungstensors mit (2.36)₁ und (2.11)₂ auf die folgende Form bringen:

$$\dot{\mathcal{W}} = \tau^{ik} \underbrace{\frac{1}{2} \dot{g}_{ik}}_{\dot{\Gamma}_{ik}} dV^+. \quad (2.41)$$

Identifizieren wir nun den unterklammerten Ausdruck mit der zeitlichen Änderung der Verzerrungen $\dot{\Gamma}_{ik}$, so ergibt sich nach Integration und Einbau der Anfangsbedingungen $g_{ik}(t=0) = \dot{g}_{ik}^+$ die übliche Beziehung für das *Greensche Verzerrungsmaß*:

$$\Gamma_{ik} = \frac{1}{2} (g_{ik} - \dot{g}_{ik}^+). \quad (2.42)$$

⁹Im Rahmen einer *globalen Formulierung* wird nicht ein Volumenelement (lokal), sondern ein Körper als Kontinuum in seiner Gesamtheit betrachtet.

¹⁰Siehe [19].

Der symmetrische Verzerrungstensor Γ_{ik} , der sich aus der Differenz der Metrikensoren berechnet, ist also - wie gezeigt werden konnte - die den Spannungen τ^{ik} in der Formänderungsleistung zugeordnete Deformationsgröße. Wegen (2.38) bezeichnet der Verzerrungstensor ebenso wie der Metriktensor eine objektive Größe, die von einer reinen Starrkörperbewegung nicht beeinflusst wird.

Anmerkung zum Greenschen Verzerrungsmaß:

Γ_{ik} ist nicht mit dem *technischen Verzerrungsmaß* ϵ_{ik} identisch, das mit ϵ_{kk} Längenänderungen (Dehnungen) und mit ϵ_{ik} ($i \neq k$) Winkeländerungen (Gleitungen) bezeichnet. Die beiden unterschiedlichen Verzerrungsmaße können jedoch formelmäßig ineinander überführt werden¹¹.

Nun gelingt es, eine übersichtliche Formulierung für den 1.Hauptsatz - und damit das *Prinzip der Energieerhaltung* - aufzustellen, in der sämtliche Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik eingearbeitet sind. Ausgehend von (2.35) folgert man nach einigen Umformungen (mit (2.16), (2.33)₁, (2.41)):

$$\dot{\rho}u = \tau^{ik}\dot{\Gamma}_{ik} - \frac{1}{\sqrt{g}} \left(h^k \sqrt{g} \right)_{,k} + \dot{\rho}h \quad \text{mit} \quad u = \frac{U}{dm}. \quad (2.43)$$

Änderungen der spezifischen inneren Energie stehen also in Zusammenhang mit Formänderungen, örtlichen Änderungen von Wärmeströmen h^k und der Existenz von Wärmequellen h .

Da einer großen Zahl von unbekannten Größen (τ^{ik} , h^k , u usw.) eine weitaus kleinere Zahl von Erhaltungsgleichungen gegenüber steht, müssen im Folgenden noch Stoffgesetze formuliert werden, damit der jeweilige Momentanzustand, der sich unter ganz bestimmten thermomechanischen Beanspruchungen einstellt, berechenbar wird. In diesem Zusammenhang ist ganz besonders darauf zu achten, dass nur solche Stoffgesetze formuliert werden, die eine Erfüllung des 2.Hauptsatzes bei vollkommen beliebigen Zustandsänderungen gewährleisten.

2.2 Die Anwendung des 2.Hauptsatzes auf ein Volumenelement

Hier wird in einem ersten Schritt der 2.Hauptsatz für das Volumenelement formuliert, anschließend wird ein zu elasto-plastischem Materialverhalten gehörender vollständiger Satz von Stoffgesetzen aufgestellt, zu dem - im Rahmen einer thermomechanisch gekoppelten Analyse - auch ein Stoffgesetz für die Wärmeleitung gehört.

Wie in Abschnitt 2.2.1 gezeigt wird, lässt sich ein thermoelastisches Stoffgesetz für die Spannungen aus einer Potenzialfunktion ableiten, die als Zustandsvariable die elastischen Verzerrungen und die Temperatur enthält. Der Einfluss der Temperatur wird aber

¹¹So gilt beispielsweise: $\epsilon_{11} = \sqrt{1 + 2\Gamma_{11}/g_{11}} - 1$. Siehe [19].

auch in Zusammenhang mit Stoffgesetzen der Plastizitätstheorie konsequent mitgenommen. So wird in Abschnitt 2.2.2.2 allgemein - auf der Basis einer *isotropen Verfestigungsfläche* - gezeigt, wie sich ein Stoffgesetz für die plastischen Verzerrungsinkremente (Fließregel) aus einer Potenzialfunktion ableiten lässt, die von der Temperatur abhängen kann. Für all diese Stoffgesetze wird der Nachweis erbracht, dass sie *thermomechanisch konsistent* sind; das heißt, sie garantieren, dass Verstöße gegen den 2.Hauptsatz für vollkommen beliebige Prozesse von vornherein ausgeschlossen werden können. Abschließend wird in Abschnitt 2.2.3 der vollständige Satz von Stoffgesetzen zusammenfassend dargestellt und gezeigt, wie sich ausgehend von einer konkreten Formulierung für die *freie Energie* die Zustandsgleichungen für Spannungen und Entropie ableiten lassen. Durch Einsetzen dieser Gleichungen in den 1.Hauptsatz ergibt sich schließlich die mit den Bewegungsgleichungen gekoppelte Wärmeleitgleichung.

Wie wir bereits in Abschnitt 1.3 vermerkt haben, macht der 2.Hauptsatz Aussagen über die 'Richtung', in der ein realer (irreversibler) Prozess abläuft. Ein solcher realer Prozess ist gekennzeichnet durch das Auftreten von 'Irreversibilitäten', die mit der Größe $\overset{IR}{\dot{S}}$ - der *Entropieproduktion* im Inneren - bezeichnet werden. Gemäß (1.24) darf diese Größe bei realen Prozessen niemals negativ werden; bei reversiblen Prozessen, die in der Realität nicht vorkommen, verschwindet sie.

Um den 2.Hauptsatz auf das Volumenelement anwenden zu können, müssen wir zunächst einmal die Zustandsgröße Entropie S einführen. Gemäß (1.23) kann die zeitliche Änderung dieser Zustandsgröße additiv in einen reversiblen Anteil, der die Entropieströmung bei Wärmezufuhr (2.19) bezeichnet, und einen irreversiblen Anteil, die Entropieproduktion, aufgespalten werden. Bei Übergang auf spezifische Größen (Division durch dm) erhält man dann nach Einsetzen von (2.43) in den 2.Hauptsatz:

$$\overset{+IR}{\dot{\rho} s} = \overset{+}{\dot{\rho} s} - \overset{+}{\dot{\rho}} \frac{\dot{u}}{T} + \frac{\tau^{ik} \dot{\Gamma}_{ik}}{T} - \frac{h^k T_{,k}}{T^2} \geq 0 \quad (2.44)$$

Die *spezifische Entropieproduktion*¹² $\overset{+IR}{\dot{s}}(\theta^k, t)$ ist in Kontinua eine *Feldgröße*, die orts- und zeitabhängig sein kann. Sie muss während eines Prozesses an jedem beliebigen Ort θ^k und zu jedem beliebigen Zeitpunkt t immer positiv sein oder verschwinden. Ein (ursprünglich) irreversibler Prozess erreicht ein *thermodynamisches Gleichgewicht*, wenn die Entropieproduktion verschwindet und $\overset{+IR}{\dot{s}}$ einen Maximalwert erreicht.

Eine zu (2.44) alternative Formulierung für den 2.Hauptsatz ergibt sich, wenn man - wie in (1.26)₂ - die Entropieproduktion mit der Temperatur T multipliziert:

$$\overset{+}{\dot{\rho} \psi} = \overset{+}{\dot{\rho} s} T - \overset{+}{\dot{\rho}} \dot{u} + \tau^{ik} \dot{\Gamma}_{ik} - \frac{h^k T_{,k}}{T} \geq 0. \quad (2.45)$$

¹²Da die Multiplikation einer massenspezifischen Größe (z.B. $\overset{+IR}{\dot{s}}$) mit $\overset{+}{\dot{\rho}}$ auf eine volumenspezifische Größe führt, ist die Bezeichnung 'spezifische Entropieproduktion' auch für $\overset{+IR}{\dot{\rho} s}$ zulässig. Das Wort 'spezifisch' wird im Folgenden der Einfachheit halber weggelassen!

Die *spezifische Dissipationsleistung* $\dot{\psi}(\theta^k, t)$ darf also ebenso wie die Entropieproduktion niemals negativ werden.

Wir wollen hier elasto-plastische Prozesse untersuchen, bei denen sich die Temperaturfelder $T(\theta^k, t)$ im Kontinuum ändern, wodurch Wärmeleitung hervorgerufen wird. *Mechanische Dissipation* - also die Umwandlung mechanischer in thermische Energie - tritt dann als Folge plastischer Deformationen im Volumenelement auf. Neben solchen irreversiblen Deformationen, die bei Entlastung ($\tau^{ik} \rightarrow 0$) als bleibende Formänderungen im Volumenelement zurückbleiben, treten aber auch reversible (elastische) Deformationen auf, die bei Entlastung wieder verschwinden. In diesem Zusammenhang wollen wir die folgende *additive Aufspaltung* für die Verzerrungen vornehmen, die jedoch nur bei Annahme *kleiner Formänderungen* zulässig¹³ ist:

$$\Gamma_{ik} = \Gamma_{ik}^{RE} + \Gamma_{ik}^{IR} \quad (2.46)$$

Setzt man diese Aufspaltung in (2.41) ein, so lässt sich die Formänderungsleistung ebenfalls in einen reversiblen und einen irreversiblen Anteil aufspalten:

$${}^+\dot{w} = \tau^{ik} \dot{\Gamma}_{ik}^{RE} + \tau^{ik} \dot{\Gamma}_{ik}^{IR} = {}^+\dot{w}^{RE} + {}^+\dot{w}^{IR}. \quad (2.47)$$

${}^+\dot{w}^{IR}$ bezeichnet dann denjenigen (differenziellen) Anteil an der Formänderungsarbeit, der bei Entlastung nicht wieder an die Umgebung durch Verrichten von Arbeit abgegeben wird, sondern als eine andere - in unserem Fall thermische - Energie im System verbleibt¹⁴. In Abschnitt 1.3.2.2 haben wir in diesem Zusammenhang von *Dissipation* gesprochen. Wir erkennen nun, dass eine Formulierung für den 2.Hauptsatz, die sich der Dissipationsleistung bedient, wie in (2.45), Sinn macht, da man die den plastischen Verzerrungen zugeordnete *irreversible Formänderungsleistung* als den Anteil an der Dissipationsleistung identifizieren kann, den wir als *mechanische Dissipationsleistung* bezeichnet haben.

$$\begin{aligned} {}^+\dot{\psi} &= {}^+\dot{w}^{IR} - \frac{h^k T_{,k}}{T} + \underbrace{{}^+\dot{T}s - {}^+\dot{u} + {}^+\dot{w}^{RE}}_{=0} \\ &= {}^+\dot{\psi}_{mech} + {}^+\dot{\psi}_{therm}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Wie wir im nachfolgenden Abschnitt sehen werden, existieren Beziehungen (Zustandsgleichungen) zwischen den Größen T , s , u , τ^{ik} und Γ^{RE} , die dazu führen, dass die drei let-

¹³Der Übergang auf *große Formänderungen* gelingt bei Einführung eines gedachten Zwischenzustandes, von dem aus eine gedachte, reversible Zustandsänderung in den Momentanzustand mündet; dann müssen eigens hierfür entwickelte Spannungs- und Verzerrungsgrößen verwendet werden. Siehe [44], [45], [72], [25].

¹⁴Experimentell konnte nachgewiesen werden, dass die plastische Arbeit nicht vollständig dissipiert, also in Wärme umgewandelt wird. Um diesen Sachverhalt in einer Materialtheorie zu berücksichtigen, muss zusätzlich zu den hier formulierten Stoffgesetzen der Plastizitätstheorie noch eine *interne Dissipationsfunktion* aufgestellt werden, die angibt, welcher Prozentsatz der plastischen Arbeit tatsächlich dissipiert wird, siehe [72], [54]; der Einfachheit halber wollen wir darauf verzichten, und näherungsweise annehmen, dass die plastische Arbeit zu 100 Prozent dissipiert wird.

zten Ausdrücke in (2.48)₁ verschwinden. Die Dissipationsleistung lässt sich dann - wie in Abschnitt 1.3.2.2 vorgeschlagen - in einen mechanischen und einen thermischen Anteil additiv aufspalten. Die *thermische Dissipationsleistung* enthält die Wärmeströme h_k und die Temperaturgradienten $T_{,k}$; sie tritt also immer in Verbindung mit einem *Temperaturgefälle* im Kontinuum auf. Oder mit anderen Worten: Wärmeleitung erzeugt 'Irreversibilitäten'. Fordert man nun gemäß (1.29), dass beide Anteile an der Dissipationsleistung nicht negativ werden:

$$+\dot{\rho}\psi_{mech} = +\dot{\rho}w^{IR} \geq 0 \quad \text{und} \quad +\dot{\rho}\psi_{therm} = -\frac{h^k T_{,k}}{T} \geq 0, \quad (2.49)$$

so kann der 2.Hauptsatz in jedem Falle erfüllt werden. Konkrete Stoffgesetze für die Wärmeströme und die irreversiblen Deformationen müssen dann so formuliert werden, dass sie mit den Ungleichungen in (2.49) kompatibel sind.

2.2.1 Gibbsche Fundamentalgleichung, Zustandsgleichungen

In der 'klassischen Thermodynamik' spielt die Gibbsche Fundamentalgleichung, die sich aus dem 1.Hauptsatz ergibt, eine herausragende Rolle. Wie in der Literatur zur Thermodynamik (z.B. [65], [66]) demonstriert wird, gelingt mit ihrer Hilfe für unterschiedliche *reversible Prozesse*

- die Identifikation von Zustandsvariablen
- die Einführung unterschiedlicher thermodynamischer Potenziale und
- die Ableitung von Zustandsgleichungen (z.B. für die Entropie).

Die aus der Gibbschen Fundamentalgleichung ableitbaren Beziehungen gelten aber gemäß [65] nicht nur für reversible Prozesse; insbesondere im Rahmen einer feldtheoretischen Beschreibung von Kontinua, bei der infinitesimal kleine Volumenelemente betrachtet werden, wird ihr Gültigkeitsbereich auch auf irreversible Prozesse ausgedehnt.

Es ist naheliegend diese in der '*Thermodynamik irreversibler Prozesse*' hinlänglich bekannte Vorgehensweise auch in der *Thermomechanik*¹⁵ anzuwenden. Im Folgenden wird gezeigt, wie die Einführung der freien Energie als einer Potenzialfunktion die Identifikation ganz bestimmter Zustandsvariablen zur Folge hat, und sich Zustandsgleichungen für die Entropie und die Spannungen aus dieser ableiten lassen.

Da sich die Gibbsche Fundamentalgleichung bei *reversibler Prozessführung* aus dem 1.Hauptsatz ergibt, müssen wir in (2.43) 'Irreversibilitäten' eliminieren. Diese treten in Verbindung mit plastischen Deformationen und Wärmeleitung auf; wir schließen

¹⁵In [54] wird das der '*Thermodynamik irreversibler Prozesse*' zugrunde liegende theoretische Konzept zwar in Worten dargestellt, bei der konkreten Formulierung von Stoffgesetzen wird es dann aber nicht mehr in aller Strenge weiterverfolgt. Auf die Bedeutung der *Gibbschen Fundamentalgleichung* wird in Zusammenhang mit der *Einführung thermodynamischer Potenziale* in der Literatur an einigen Stellen hingewiesen, siehe [40], [25], [54].

also: Isotherm ($T_{,k} = 0$) ablaufende elastische Formänderungen sind reversibel. Dann gilt:

$$\Gamma_{ik} = \Gamma_{ik}^{RE}. \quad (2.50)$$

Die letzten beiden Terme in (2.43) repräsentieren wegen (2.16) die zeitliche Änderung der (spezifischen) Wärme, diese können hier mit (1.15) durch ${}^+ \dot{T} \dot{s}$ ersetzt werden. Man erhält so die *Gibbsche Fundamentalgleichung* aus dem 1.Hauptsatz:

$${}^+ \dot{u} = \tau^{ik} \dot{\Gamma}_{ik}^{RE} + {}^+ \dot{T} \dot{s}. \quad (2.51)$$

In der Thermodynamik reversibler Prozesse deutet man¹⁶ diese Gleichung als ein *vollständiges Differenzial*, wie es sich bei Division von (1.2) durch Dt ergeben würde. Die innere Energie ist demnach eine *Zustandsgröße*, die sich aus den *Zustandsvariablen* Γ_{ik}^{RE} und s berechnen lässt, es existiert also eine *Zustandsgleichung* vom Typ:

$${}^+ u = {}^+ \hat{u}(\Gamma_{ik}^{RE}, s) \quad \Rightarrow \quad {}^+ \dot{u} = {}^+ \frac{\partial \hat{u}^{RE}}{\partial \Gamma_{ik}^{RE}} \dot{\Gamma}_{ik}^{RE} + {}^+ \frac{\partial \hat{u}^{RE}}{\partial s} \dot{s}. \quad (2.52)$$

Bei Koeffizientenvergleich von (2.51) mit (2.52)₂ ergeben sich weitere Zustandsgleichungen:

$$\tau^{ik} = {}^+ \frac{\partial \hat{u}^{RE}}{\partial \Gamma_{ik}^{RE}} = \hat{\tau}^{ik}(\Gamma_{ik}^{RE}, s); \quad T = \frac{\partial \hat{u}^{RE}}{\partial s} = \hat{T}(\Gamma_{ik}^{RE}, s). \quad (2.53)$$

Kennt man also eine konkrete Formulierung für ${}^+ \hat{u}(\Gamma_{ik}^{RE}, s)$, so kann man die Zustandsgleichungen für die Spannungen und die Entropie aus dieser ableiten. Man spricht in diesem Zusammenhang von einem *thermodynamischen Potenzial*, gemäß [65] enthält es „alle wesentlichen thermodynamischen Informationen“ eines Systems.

Ausgehend von der Gibbschen Fundametalgleichung können aber noch andere Potentiale eingeführt werden. Wir werden im Folgenden - in Anlehnung an die üblichen Formulierungen in der Thermomechanik - nicht die innere, sondern die *freie Energie* als Potenzial einführen. Sie ist eine Zustandsgröße, die sich folgendermaßen berechnet:

$$f = u - Ts. \quad (2.54)$$

Durch Einsetzen in (2.51) kann man dann - bei analoger Vorgehensweise wie oben - folgern:

$${}^+ \dot{f} = {}^+ \hat{f}(\Gamma_{ik}^{RE}, T); \quad \tau^{ik} = {}^+ \frac{\partial \hat{f}}{\partial \Gamma_{ik}^{RE}} = \hat{\tau}^{ik}(\Gamma_{ik}^{RE}, T); \quad s = -\frac{\partial \hat{f}}{\partial T} = \hat{s}(\Gamma_{ik}^{RE}, T). \quad (2.55)$$

Die abhängig-veränderlichen Systemeigenschaften f , u , s , τ^{ik} hängen dann von den unabhängig-veränderlichen Größen Γ_{ik}^{RE} und T ab, die wir als *Zustandsvariable* bezeichnen. Da eindeutige Beziehungen zwischen all diesen Größen existieren, sind sie *Zustandsgrößen*.

¹⁶Siehe z.B. [65].

Bei *Übergang auf irreversible Prozesse* verliert die Gleichung (2.51) strenggenommen ihre Gültigkeit. Trotzdem wird, wie schon oben bemerkt, die Gibbsche Fundamentalgleichung mit ihren Schlussfolgerungen in der 'Thermodynamik irreversibler Prozesse' - sozusagen im Rahmen einer Näherung - übernommen: In [65] heißt es in diesem Zusammenhang:

„Es zeigt sich nun, dass sich diese Gleichung, [...] bei Anwendung auf kleine (der Benutzung der Differenzialrechnung entsprechend eigentlich infinitesimal kleine) Teilsysteme, in die man das betrachtete Gesamtsystem zerlegt denken muss, hervorragend bewährt, also ihr Gültigkeitsbereich weit größer ist.“

Die Übertragung auf irreversible Prozesse ist jedoch nicht immer möglich, sie ist an gewisse Bedingungen genüpft. Die Frage, ob eine Anwendung der Gibbschen Gleichung in der Thermodynamik irreversibler Prozesse im Rahmen einer Näherung zulässig ist, führt auf das 'Gedankenmodell' des *lokalen Gleichgewichts*, siehe Abschnitt 1.1. Ausführlichere Überlegungen hierzu finden sich in [54], hier wird auch darauf hingewiesen, dass bei sehr schnell ablaufenden Prozessen die Näherung unter Umständen ihre Gültigkeit verliert.

In der Plastizitätstheorie besteht heute prinzipiell Einigkeit in der Verwendung von Zustandsgleichungen vom Typ (2.55), wobei neben der freien und der inneren Energie auch noch andere Potenziale (z.B. die freie Enthalpie) denkbar wären. Unterschiede bestehen allerdings in der Wahl der Zustandsvariablen: Die Verwendung zusätzlicher *interner Variablen* wird heute von vielen Autoren¹⁷ vorgeschlagen, wobei in [40] richtig erkannt wird, dass diese Variablen dann auch in einer Formulierung für die Gibbsche Fundamentalgleichung mit ihren entsprechenden (reversiblen) Arbeitsanteilen enthalten sein müssen.

Im Sinne all dieser Überlegungen wollen wir im Folgenden die Zustandsgleichungen in (2.55) auch bei Auftreten von 'Irreversibilitäten' (*Wärmeleitung, bleibende Formänderungen*) weiterverwenden, wobei wir der Einfachheit halber auf die Einführung von internen Variablen verzichten. Mit Ausnahme der Dichte $\bar{\rho}$, die eine Konstante ist, sind alle in (2.54) und (2.55) enthaltenen Größen *Zustandsgrößen*¹⁸. Sind die *Zustandsvariablen* $\overset{RE}{\Gamma}_{ik}$ und T bekannt, so können die restlichen Zustandsgrößen des Systems (Volumenelement) berechnet werden, wenn eine konkrete Zustandsfunktion für die freie Energie existiert. Für die freie Energie verwenden wir die in [26] für *thermoelastisch-isotropes Materialverhalten* formulierte Funktion:

$$\bar{\rho}f = \left[\frac{1}{2} E^{ikrs} \overset{RE}{\Gamma}_{ik} \overset{RE}{\Gamma}_{rs} - \gamma (T - T_0) \overset{RE}{g}^{ik} \overset{RE}{\Gamma}_{ik} \right] - \bar{\rho}c \left[T \left(\ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - 1 \right) + T_0 \right] \quad (2.56)$$

$$\text{mit } E^{ikrs} = G \left(\overset{RE}{g}^{ir} \overset{RE}{g}^{ks} + \overset{RE}{g}^{is} \overset{RE}{g}^{kr} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \overset{RE}{g}^{ik} \overset{RE}{g}^{rs} \right) ; \quad \gamma = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T .$$

¹⁷Siehe [25], [72], [11], [44], [45], [40] usw.

¹⁸Die elastischen Verzerrungen $\overset{RE}{\Gamma}_{ik}$ hier durch die Gesamtverzerrungen Γ_{ik} zu ersetzen, ist nicht zulässig, da die darin enthaltenen plastischen Verzerrungen $\overset{IR}{\Gamma}_{ik}$ gemäß [44] keine Zustandsgrößen sind.

Aus (2.56) lässt sich - unter Beachtung von (2.55)₂ - ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungen und elastischen Verzerrungen sowie zwischen Spannungen und Temperaturänderungen ableiten. Die Potenzialfunktion in (2.56) enthält neben den *kontravarianten Metriktensoren*

$${}^+g^{ik} = {}^+g^i \cdot {}^+g^k \quad \text{mit} \quad {}^+g^i \cdot {}^+g_k = \delta_k^i \quad (2.57)$$

die in der *Thermoelastizitätstheorie* bekannten Stoffkonstanten G , ν und α_T (*Schubmodul*, *Querkontraktionszahl* und *Wärmeausdehnungskoeffizient*). Die Temperatur T_0 des Ausgangszustandes wird als bekannt vorausgesetzt. Die *spezifische Wärmekapazität*¹⁹ soll hier eine Stoffkonstante sein. Allgemein lässt sich c bei unterdrückten Formänderungen aus der inneren Energie ableiten: Unter Beachtung von (2.54), (2.55)₂ und (2.56) gilt:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial T} = c \quad \text{für} \quad \Gamma_{ik}^{RE} = 0 \quad (2.58)$$

In der Plastizitätstheorie geht man häufig so vor, dass man eine ursprünglich für thermoelastisches Materialverhalten formulierte Zustandsfunktion für die freie Energie - wie z.B. (2.56) - weiterverwendet und Zustandsgleichungen für die Spannungen und die Entropie aus dieser ableitet. Vor dem Hintergrund der oben erläuterten Näherung, basierend auf der Gibbsschen Fundamentalgleichung, ist diese Vorgehensweise einleuchtend: Zustandsgrößen - und Beziehungen zwischen diesen - werden für ursprünglich reversibles Materialverhalten eingeführt und bei Auftreten von 'Irreversibilitäten' weiter verwendet; es macht also Sinn die in (2.55) und (2.54) enthaltenen Größen als 'quasi-reversibel' zu bezeichnen. Es ist dann nicht verwunderlich, dass die 'quasi-reversiblen' Anteile im 2.Hauptsatz verschwinden: Unabhängig von einer konkreten Formulierung für die freie Energie ergibt sich - unter Beachtung von (1.2) - nach Einsetzen von (2.55) mit (2.54) in (2.48):

$$T \dot{s} - \dot{u} + \dot{w}^{RE} = 0 \quad (2.59)$$

Bei Auftreten irreversibler Phänomene müssen dann zur Berechnung der Wärmeströme und der plastischen Deformationen weitere Stoffgesetze formuliert werden. Wie wir sehen werden, lassen sich diese Größen aber nicht mehr allein aus den Zustandsvariablen Γ_{ik}^{RE} und T berechnen; so muss zur Berechnung der plastischen Verzerrungen auch die 'Vorgeschichte' bekannt sein. Dies bedeutet, dass im Rahmen der hier gezeigten Vorgehensweise

- zur Berechnung der Größen h^k und Γ_{ik}^{IR} keine *Zustandsgleichungen* existieren
- und dass sie demnach auch keine *Zustandsgrößen* sind.

Anmerkungen zu viskosen Effekten in den Spannungen:

¹⁹Allgemein wird die *spez. Wärmekapazität* in der Thermodynamik als eine von der Temperatur abhängige Größe $c(T)$ eingeführt, siehe [4]. Ist im konkreten Falle ein Abhängigkeitsverhältnis $c = \hat{c}(T)$ bekannt, so muss eine Formulierung für die freie Energie - abweichend zu (2.56)₁ gefunden werden, die die Erfüllung von (2.58) gewährleistet!

Gemäß (2.55)₂ sind die Spannungen τ^{ik} Zustandsgrößen, die sich aus den elastischen Verzerrungen und der Temperatur eindeutig berechnen lassen. Die für einen ursprünglich reversiblen Prozess eingeführten Spannungen sind also - im Gegensatz zu *viskosen Spannungen* - von Verzerrungsgeschwindigkeiten unabhängig. Wollte man neben solchen 'quasi-reversiblen' Spannungen auch noch geschwindigkeitsproportionale (viskose) Anteile berücksichtigen, so wäre eine additive Aufspaltung - ähnlich wie für die Verzerrungen (2.46) - denkbar. Eine solche Vorgehensweise würde bedeuten:

- In (2.48) - und speziell in der mechanischen Dissipationsleistung - wären dann zusätzliche Anteile enthalten, die man den *viskosen Spannungen*²⁰ und ihren zugehörigen Verzerrungsgeschwindigkeiten zuordnen könnte.
- Es müssten Stoffgesetze für die *viskoelastischen* bzw. *-plastischen* Spannungen formuliert werden.

Wie schon in der Einleitung angemerkt, sollen jedoch in der vorliegenden Arbeit solche viskosen Effekte nicht behandelt werden. Das heißt, dass für die ('quasi-reversiblen') Spannungen τ^{ik} eine Zustandsgleichung vom Typ (2.55)₂ existiert!

Anmerkungen zu einer alternativen Vorgehensweise:

Bei *thermoelastischem Materialverhalten mit Wärmeleitung* findet man in der Literatur²¹ häufig eine alternative Vorgehensweise, die letztendlich auf die selben Zustandsgleichungen wie in (2.55) führt. Hierbei wird nicht von der Gibbschen Fundamentalgleichung, sondern von einer Formulierung für den 2.Hauptsatz wie in (2.44) ausgegangen. Die Zustandsgleichungen ergeben sich, wenn man fordert, dass bei Einführung der Zustandsvariablen Γ_{ik}^{RE} , T und $T_{,k}$ der Hauptsatz für beliebige thermoelastische Prozesse immer erfüllt werden muss. Im Folgenden sind die Gründe aufgezählt, warum dieser Weg hier nicht beschritten wird:

- Die Verwendung von Zustandsvariablen $T_{,k}$ ($k = 1, 2, 3$), die der Wärmeleitung zugeordnet sind, steht im Widerspruch zu der üblichen in der '*Thermodynamik irreversibler Prozesse*'²² beschrittenen Vorgehensweise, wo Zustandsgrößen ausgehend von einer reversiblen Prozessführung eingeführt werden.
- Die Ableitung der Zustandsgleichungen (2.55) aus dem 2.Hauptsatz gelingt nicht mehr bei *thermoelastischem Materialverhalten ohne Wärmeleitung* ($T_{,k} = 0$), da dann keine 'Irreversibilitäten' auftreten und der 2.Hauptsatz keine Bedeutung mehr hat.
- Die angesprochene Vorgehensweise ist auch in Zusammenhang mit irreversiblen Materialverhalten nicht allgemein gültig, sondern 'funktioniert' nur bei *thermoelastischem Materialverhalten mit Wärmeleitung*: So wäre z.B. bei Auftreten

²⁰ Alternativ findet sich in der Literatur ([54],[86]) auch die Bezeichnung *dissipative Spannungen*.

²¹ Siehe z.B. [26], [25], [35].

²² Siehe z.B. [66], [65].

von plastischen Deformationen die Einführung weiterer Zustandsvariablen notwendig und die Zustandsgleichungen (2.55) ergäben sich nicht mehr zwingend aus dem 2.Hauptsatz.

2.2.2 Thermomechanisch konsistente Stoffgesetze zur Beschreibung irreversibler Phänomene

Als *thermomechanisch konsistent* bezeichnen wir Stoffgesetze, wenn sie eine Erfüllung des 2.Hauptsatzes zur Folge haben. Wie oben gezeigt, kann man in der Formulierung (2.48)₂ für die Dissipationsleistung zwei unterschiedliche Anteile identifizieren, von denen der eine der *thermischen Dissipation* (bei Wärmeleitung) und der andere der *mechanischen Dissipation* (bei plastischen Deformationen) zugeordnet werden kann. Mit der Forderung, dass beide Anteile für sich niemals negativ werden, siehe (2.49), wird der 2.Hauptsatz in jedem Falle erfüllt. Im Folgenden wird nicht nur gezeigt, dass konkrete Stoffgesetze für Wärmeleitung und bleibende Deformationen ihre entsprechenden Ungleichung in (2.49) erfüllen - also *konsistent* sind - , sondern dass sich hinter diesen Stoffgesetzen übergeordnete thermodynamische Prinzipien bzw. Theorien verbergen: So wird gezeigt, dass

- die Stoffgesetze für die Wärmeströme h^k mit der in Abschnitt 1.3.3 formulierten *Theorie linearer phänomenologischer Verknüpfungen* kompatibel sind und
- die Stoffgesetze für plastische Verzerrungsgeschwindigkeiten (bzw. -inkremente) sich aus dem *Prinzip der maximalen Entropieproduktion* ableiten lassen.

2.2.2.1 Stoffgesetze für Wärmeleitung

In Verbindung mit Prozessen der Wärmeleitung haben wir in Abschnitt 1.4.1 bereits das *Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung* vektoriell formuliert. Es erfüllt anschaulich, wie in Abbildung 1.11 gezeigt, die in Zusammenhang mit dem 2.Hauptsatz der Thermodynamik getroffene Forderung, dass Wärme immer von 'Warm' nach 'Kalt' fließen muss. Dieser qualitativen Forderung entspricht aber die Ungleichung (2.49)₂, die man nach Umformung folgendermaßen darstellen kann:

$$+\dot{\rho}\psi_{therm} = T h^k \left(\frac{1}{T} \right)_{,k} \geq 0. \quad (2.60)$$

Der Vergleich mit (1.30)₂ macht dann die folgende Schlussfolgerung naheliegend: Infolge der Existenz 'thermodynamischer Kräfte' $(1/T)_{,i}$ treten im Volumenelement 'thermodynamische Ströme' h^k auf²³. In diesem Sinne ist gemäß den Ausführungen in Abschnitt 1.3.3 ein lineares Abhängigkeitsverhältnis

$$h^k = h^k((1/T)_{,i}) \quad (2.61)$$

²³Siehe auch [65].

zwischen 'Kräften' und 'Strömen' denkbar, dass genau durch das Stoffgesetz (E.7) beschrieben wird, dass wir in Anhang E aus dem Fourierschen Gesetz abgeleitet haben. Nach Umformung von (E.7) erhält man eine Beziehung vom Typ (1.31):

$$h^k = \underbrace{\lambda T^2}_{\text{phänomenologische Koeffizienten}} \underbrace{g^{+ki}}_{\text{symmetrisch}} \left(\frac{1}{T} \right)_{,i} . \quad (2.62)$$

Der unterklammerte Ausdruck bezeichnet dann genau die *phänomenologischen Koeffizienten*, die - wie in (1.32) gefordert wird und sich auch sofort nachweisen lässt - symmetrisch sind: Es gilt $g^{+ki} = g^{+ik}$. Wie in Abschnitt 1.3.3 beschrieben, können die Koeffizienten von den Zustandsvariablen $(\overset{RE}{\Gamma}_{ik}, T)$ abhängen: Hier ist lediglich die Temperatur vertreten.

Es kann also gezeigt werden, dass man das Stoffgesetz für die Wärmeströme als eine Anwendung der Theorie linearer phänomenologischer Verknüpfungen und ihrer Grundgleichungen (1.30)-(1.32) verstehen kann.

Der Nachweis der Gültigkeit des 2.Hauptsatzes kann nun erbracht werden, in dem man (2.62) in (2.60) einsetzt: Wegen (2.10)₂ kann man schreiben:

$$\dot{\rho}\psi_{therm}^{+} = \lambda T^3 \underbrace{g^{+i}}_{\text{symmetrisch}} \left(\frac{1}{T} \right)_{,i} \cdot \underbrace{g^{+k}}_{\text{symmetrisch}} \left(\frac{1}{T} \right)_{,k} \geq 0 \quad (2.63)$$

Die beiden unterklammerten Ausdrücke lassen sich als identische Vektoren deuten, deren Skalarprodukt (definitionsgemäß) niemals negativ werden kann. Die Ungleichung (2.60) ist also immer erfüllt.

2.2.2.2 Stoffgesetze für plastische Deformationen

Die Frage, ob eine zu den Überlegungen im vorangegangenen Abschnitt vergleichbare Vorgehensweise auch hier möglich ist, ist naheliegend. Eine Anwendung der *Theorie linearer phänomenologischer Verknüpfungen* auf das irreversible Phänomen der plastischen Deformationen würde ausgehend von einer Formulierung für die *mechanische Dissipationsleistung*

$$\dot{\rho}\psi_{mech}^{+} = \dot{\rho}w^{+IR} = \tau^{ikIR} \dot{\Gamma}_{ik} \geq 0 \quad (2.64)$$

auf ein lineares Abhängigkeitsverhältnis zwischen Spannungen und plastischen Verzerungsgeschwindigkeiten führen, das einen Widerspruch zu unserer Spannungsdefinition in Abschnitt 2.2.1 ergäbe: Denn wir haben hier die Spannungen als 'quasi-reversible' Zustandsgrößen eingeführt, die sich gemäß (2.55)₂ eindeutig aus den Zustandsvariablen $\overset{RE}{\Gamma}$ und T bestimmen lassen. Eine Anwendung der in Abschn. 1.3.3 formulierten Theorie ist also hier nicht zulässig.

Die Anwendung solcher Ansätze würde letztendlich auf die Beschreibung *viskoser Effekte* führen, die man in der herkömmlichen Plastizitätstheorie von vorneherein ausschließen möchte. Deshalb fordert man - hier bei Mitnahme temperaturabhängiger

Effekte - von *inkrementellen Stoffgesetzen*, dass sie den folgenden Aufbau haben:

$$\overset{\bullet}{\Gamma}_{ik}^{IR} = A_{ikrs} \overset{\bullet}{\tau}^{rs} + B_{ik} \overset{\bullet}{T}. \quad (2.65)$$

Man [44] spricht dann davon, „dass die plastischen Verzerrungsinkremente linear von den Spannungs- und Temperaturinkrementen abhängen sollen“. In [72] werden Stoffgesetze dieser Art auch als *Entwicklungsgesetze* ('evolution laws') bezeichnet. Die irreversiblen Verzerrungen $\overset{IR}{\Gamma}_{ik}$ können also nicht direkt aus dem aktuellen Zustand berechnet werden, sondern sie müssen *entwickelt* werden: Das heißt, dass man im Rahmen konkreter Berechnungen die tatsächlichen plastischen Deformationen nur noch durch Integration (bzw. Summation) über alle *Inkremente* bestimmen kann.

In der Plastizitätstheorie geht man davon aus, dass bei Belastungszunahme, ausgehend von einem unbelasteten Ausgangszustand, plastische Deformationen erstmals auftreten, wenn eine skalarwertige Fließbedingung erfüllt wird. Charakterisiert man die 'Belastung' eines Volumenelementes durch den Spannungszustand und die Temperatur, so ergibt sich eine *Fließbedingung* der Form

$$F(\tau^{ik}, T) = konst. \quad (2.66)$$

Bei isothermen Zustandsänderungen ($T = konst.$) wird mit (2.66) eine 6-dimensionale Fläche im *Spannungsraum* beschrieben. Jeder unabhängigen Komponente des Spannungstensors - wegen der Symmetrie insgesamt 6 - entspricht dann eine unabhängige 'Richtung' in diesem Spannungsraum. Plastische Deformationen treten erstmals auf, wenn ein Spannungszustand erreicht wird, der auf der 5-dimensionalen *Fließfläche* liegt.

Bei Mitnahme der Temperatur als einer weiteren unabhängigen Variablen erhöht sich die Zahl der Freiheitsgrade um jeweils einen; man kann dann von einem *thermodynamischen Raum*²⁴ sprechen, in dem thermomechanische Belastungsänderungen des Volumenelementes, zu denen variable Werte für τ^{ik} und T gehören, ablaufen. Werden nun Belastungen im thermodynamischen Raum erreicht, die auf der Fließfläche (2.66) liegen, so geht diese über in die *Verfestigungsfläche*. Diese Fläche ändert sich mit fortgesetzten plastischen Deformationen im 'Raum'²⁵.

Je nachdem, welche Arten von Änderungen man beschreiben will, unterscheidet man zwischen

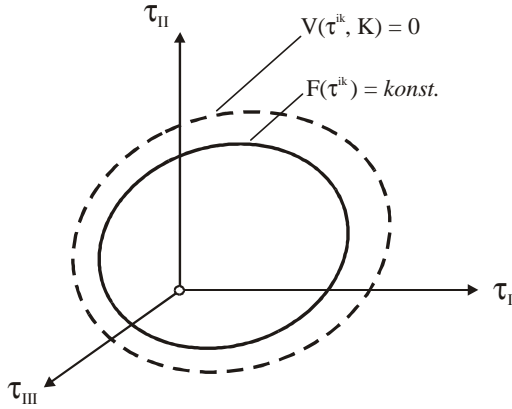
- *isotroper Verfestigung*, bei der es zu einer reinen *Aufweitung* der Verfestigungsfläche im thermodynamischen Raum kommt und
- *kinematischer Verfestigung*, bei der sich nur die *Lage* der 'Fläche' im 'Raum' ändert.

²⁴Siehe Abschnitt 1.1. Wegen der Zustandsgleichung $\tau^{ik} = \hat{\tau}^{ik}(\overset{RE}{\Gamma}_{rs}, T)$ könnte man in (2.66) auch alternativ die Zustandsvariablen verwenden.

²⁵Für den Sonderfall eines *idealplastischen* Werkstoffes besteht kein Unterschied zwischen Fließ- und Verfestigungsfläche.

Es sind aber auch, wie z.B. in [25] beschrieben, Mischformen denkbar, bei denen es zu Lageänderungen mit gleichzeitiger Aufweitung kommt. Bei isotherm ablaufenden Prozessen und Isotropie kann man die unterschiedlichen Verfestigungsmodelle im *Hauptspannungsraum* veranschaulichen, siehe Abbildung 2.5.

Isotrope Verfestigung:



Kinematische Verfestigung:

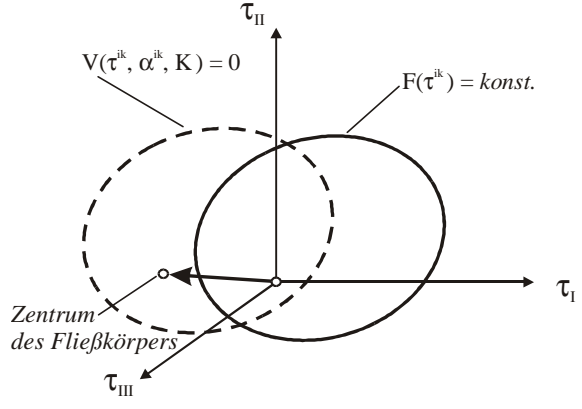


Abbildung 2.5: Verfestigungsmodelle im Hauptspannungsraum (isotherm)

Zur Beschreibung *isotroper Verfestigung* ändert man die ursprüngliche Fließbedingung (2.66) dahingehend, dass man zu den Variablen τ^{ik} und T noch den Parameter K hinzunimmt. Basierend auf einer Verfestigungshypothese vom Typ 'work-hardening', die K von der *plastischen Arbeit* abhängen lässt, ergibt sich²⁶:

$$V(\tau^{ik}, T, K) = 0 \quad \text{bzw.} \quad F(\tau^{ik}, T) - K(\overset{IR}{w}) = 0. \quad (2.67)$$

Häufig kommen in der Plastizitätstheorie aber auch Verfestigungshypothesen vom Typ 'strain-hardening' zum Einsatz, bei denen als *Verfestigungsparameter* nicht die plastische Arbeit, sondern eine *plastische Vergleichsdehnung* ('plastic arclength') zum Einsatz kommt.

In (2.67)₂ gibt F die jeweilige thermomechanische Belastung an, die auf das Volumenelement einwirkt. Der Betrag von K ist ein Maß für die Aufweitung der Verfestigungsfläche im thermodynamischen Raum und hängt - da zur Berechnung von $\overset{IR}{w}$ über die Zeit integriert werden muss - von der 'Vorgeschichte' ab.

Bei *kinematischer Verfestigung* erweitert man hingegen die ursprüngliche Fließbedingung um einen Spannungstensor α^{ik} , den man sich im Spannungsraum als einen 'Vektor' vorstellen kann, siehe Abbildung 2.5 (rechts), mit dem eine Translation des Zentrums des Fließkörpers beschrieben wird:

$$V(\tau^{ik}, \alpha^{ik}, T) = 0. \quad (2.68)$$

Die Formulierungen in (2.67) und (2.68) beschreiben *Verfestigungsflächen*. Eine kinematische Verfestigungsfläche zeichnet sich dadurch aus, dass die Beschreibung des *Bauschinger-effekts*²⁷ möglich wird.

²⁶Siehe auch [8], [72], [53].

²⁷Siehe z.B. [25], [6].

Im Folgenden werden wir uns auf isotrope Verfestigungsflächen vom Typ 'work-hardening' (2.67) beschränken und die Gültigkeit des 2.Hauptsatzes überprüfen. Die gezeigte Vorgehensweise kann jedoch prinzipiell auch auf andere Verfestigungsflächen angewandt werden; in [85] wird für kinematische Verfestigung gezeigt, dass Verstöße gegen den 2.Hauptsatz möglich sind, wenn der Ursprung des Spannungsraumes nicht mehr im Fließkörper enthalten ist, siehe Abbildung 2.5 (rechts), da dann bei Entlastung ($\tau^{ik} \rightarrow 0$) plastische Deformationen auftreten würden.

Um sicherzustellen, dass nur bei Belastung plastische Deformationen auftreten, formuliert man in der Plastizitätstheorie die *Belastungsbedingung*. Ausgehend von einer isotropen Verfestigungsfläche (2.67)₂ lautet diese *Bedingung für eine Zunahme der thermomechanischen Belastung*:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \tau^{ik}} \dot{\tau}^{ik} + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} > 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\Gamma}_{ik}^{IR} \neq 0. \quad (2.69)$$

Zur Berechnung der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten bedient man sich in der Plastizitätstheorie üblicherweise der von von Mises begründeten *Fließregel*:

$$\dot{\Gamma}_{ik}^{IR} = \mu \frac{\partial V}{\partial \tau^{ik}}. \quad (2.70)$$

Stellt man sich die plastischen Verzerrungssinkremente $\dot{\Gamma}_{ik}^{IR}$ als Komponenten eines 6-dimensionalen 'Vektors' vor, so besagt (2.70), dass dieser 'Vektor' senkrecht auf der Fließ- bzw. Verfestigungsfläche im Spannungsraum steht. In diesem Sinne bezeichnet man die Fließregel auch als *Normalitätsbedingung*.

Wie in [6] gezeigt wird, kann die Fließregel aus dem *Prinzip der größten Dissipationsleistung* abgeleitet werden. Dieses Prinzip besagt, dass wenn (2.67) und (2.69) erfüllt sind, plastische Formänderungen genau so ablaufen, dass die irreversible Formänderungsleistung zu jedem Zeitpunkt einen Maximalwert erreicht:

$${}^+\dot{\rho}\psi_{mech} = \tau^{ik} \dot{\Gamma}_{ik}^{IR} = \max. \quad (2.71)$$

Entgegen den Ausführungen in [6] wollen wir hier nicht zwei unterschiedliche Spannungszustände einführen, sondern einfach τ^{ik} variabel setzen. Im Gegensatz hierzu seien die plastischen Verzerrungssinkremente vorgegeben, also fest. Die 'Funktion' ${}^+\dot{\rho}\psi_{mech}$ hängt dann nur noch vom Spannungszustand ab:

$${}^+\dot{\rho}\psi_{mech} = {}^+\dot{\rho}\psi_{mech}(\tau^{ik}). \quad (2.72)$$

Wir suchen nun nach demjenigen Spannungszustand, für den die 'Funktion' (2.72) extremal wird und gleichzeitig $V = 0$ gilt. Oder mit anderen Worten: Bei der Lösung der Extremalwertaufgabe kommen nur solche Spannungszustände in Betracht, die auf der Verfestigungsfläche liegen. In der Mathematik wird dieses Problem als '*Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung*' bezeichnet; gemäß [10] muss dann gelten:

$$\frac{\partial}{\partial \tau^{ik}} \left(\tau^{ik} \dot{\Gamma}_{ik}^{IR} - V\mu \right) = 0. \quad (2.73)$$

Da $\dot{\Gamma}_{ik}^{IR}$ fest steht, ergibt sich nach Ableitung aus (2.73) genau die Fließregel (2.70). Hierin bezeichnet μ einen *Lagrangeschen Multiplikator*, der sich wie unten gezeigt wird, aus der *Konsistenzbedingung*

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \tau^{ik}} \dot{\tau}^{ik} + \frac{\partial V}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial V_{IR}}{\partial w} \dot{w} = 0 \quad (2.74)$$

berechnen lässt.

Da für den Sonderfall isothermer Zustandsänderungen die (mechanische) Dissipationsleistung proportional zur Entropieproduktion ist, lässt sich das „*Prinzip der größten Dissipationsleistung*“ als Sonderfall des *Prinzips vom Maximum der spezifischen Entropieproduktion*“ auffassen, siehe [6]. Über Letzteres schreibt Ziegler in [86]:

„*In fact, if a closed system tends towards its state of maximal entropy, it seems reasonable that the rate of entropy increases under prescribed forces be a maximum, i.e., that the system should approach its final state on the shortest possible path.*”

Wir haben in Abschnitt 1.3.2.1 gelernt, dass abgeschlossene Systeme ihren Endzustand (das thermodynamische Gleichgewicht) erreichen, wenn die Entropie einen Maximalwert erreicht hat. Das Prinzip der maximalen Entropieproduktion besagt also, dass dieser Endzustand auf dem kürzest-möglichen Weg erreicht wird. Bei Übergang auf geschlossene Systeme, siehe Abschnitt 1.3.2.2, gelten diese Überlegungen dann nicht mehr für die gesamte Entropie S , sondern für die im Inneren erzeugte Entropie \dot{S}^{IR} , die ihren Maximalwert auf schnellst-möglichem Wege erreichen soll. Man kann - wie in [86] - dieses Prinzip als eine Erweiterung oder Verschärfung des 2.Hauptsatzes verstehen; hieraus lassen sich eine Reihe von Stoffgesetzen für irreversible Phänomene (u.a. auch für Wärmeleitung) ableiten.

Da wir bei Erfüllung der *notwendigen Extremalbedingung* (2.73) mit der Fließregel noch nicht sicher sein können, ob der 2.Hauptsatz auch tatsächlich erfüllt wird²⁸, wollen wir nun μ berechnen, um die Dissipationsleistung konkret bestimmen zu können. Unter Beachtung von (2.70) und (2.67) gilt zunächst:

$$\dot{\rho}^{+IR} = \mu \tau^{ik} \frac{\partial F}{\partial \tau^{ik}}. \quad (2.75)$$

Nach Einsetzen von (2.75) in die Konsistenzbedingung (2.74) kann man nach μ auflösen:

$$\mu = \frac{\dot{\rho}}{\frac{\partial K}{\partial w} \frac{\partial F}{\partial \tau^{rs}} \tau^{rs}} \left(\frac{\partial F}{\partial \tau^{ik}} \dot{\tau}^{ik} + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} \right). \quad (2.76)$$

Die Fließregel kann somit als ein inkrementelles Stoffgesetz vom Typ (2.65) gedeutet werden: Durch Koeffizientenvergleich können die Größen A_{ikrs} und B_{ik} können identifiziert werden; sie sind unabhängig von der (thermomechanischen) Belastungsgeschwindigkeit. Viskose Effekte sind somit ausgeschlossen.

²⁸Denkbar wäre auch, dass sich für $\dot{\psi}_{mech}$ ein Minimalwert einstellt!

Letztendlich ergibt sich die *Dissipationsleistung* zu

$${}^+\dot{\psi}_{mech} = \frac{({}^+\dot{\rho})^2}{\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{w}^{IR}}\right)} \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial \tau^{ik}} \dot{\tau}^{ik} + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T}\right)}_{>0 \text{ wegen (2.69)!}}. \quad (2.77)$$

Der 2.Hauptsatz (${}^+\dot{\psi}_{mech} \geq 0$) wird schließlich für

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{w}^{IR}} > 0 \quad (2.78)$$

erfüllt, was nichts anderes bedeutet, als dass die Verfestigungsfläche im thermodynamischen Raum immer nur größer werden darf. Bemerkenswert ist, dass die konkrete Gestalt der Verfestigungsfläche für einen Nachweis des 2.Hauptsatzes hier keine Rolle spielt.

2.2.3 Zusammenfassung: Stoffgesetze für thermo-elasto-plastisches Materialverhalten und die gekoppelte Wärmeleitgleichung

Ausgehend von der folgenden *Potenzialfunktion* für die freie Energie:

$${}^+f = \frac{1}{2} E^{ikrs} \Gamma_{ik}^{RE} \Gamma_{rs}^{RE} - \gamma(T - T_0) \dot{g}^{ik} \Gamma_{ik}^{RE} - {}^+\rho c \left[T \left(\ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - 1 \right) + T_0 \right], \quad (2.79)$$

die von den

$$\text{Zustandsvariablen } \Gamma_{ik}^{RE}, T \quad (2.80)$$

abhängt, können gemäß (2.54/55) die *abhängigen Zustandsgrößen* aus den folgenden *Zustandsgleichungen* berechnet werden:

$$\begin{aligned} \dot{\tau}^{ik}(\Gamma_{ik}^{RE}, T) &= E^{ikrs} \Gamma_{rs}^{RE} - \gamma(T - T_0) \dot{g}^{ik} \\ \dot{s}(\Gamma_{ik}^{RE}, T) &= \frac{\gamma}{{}^+\rho} \underbrace{\dot{g}^{ik} \Gamma_{ik}^{RE}} + c \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) \\ \dot{u}(\Gamma_{ik}^{RE}, T) &= \frac{1}{2{}^+\rho} E^{ikrs} \Gamma_{ik}^{RE} \Gamma_{rs}^{RE} + \frac{\gamma}{{}^+\rho} T_0 \dot{g}^{ik} \Gamma_{ik}^{RE} + c(T - T_0). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Hierbei ist insbesondere darauf zu achten, dass die Entropie, die sich - wie in Abschnitt 2.2.1 ausgehend von der Gibbschen Fundamentalgleichung gezeigt wird - aus der freien Energie ableiten lässt, nicht nur von Temperaturänderungen, sondern auch von elastischen Volumenänderungen abhängt: Der unterklammerte Ausdruck in (2.81)₂ bezeichnet nämlich gemäß [26] die 1.Invariante I des (elastischen) Verzerrungstensors. Hieraus resultiert die Tatsache, dass - wie wir weiter unten noch sehen werden - zeitliche Änderungen von I in der Wärmeleitgleichung vertreten sind; wir sprechen in diesem Zusammenhang vom *elastischen Kopplungsterm*.

Zur Beschreibung der *irreversiblen Phänomene* gehört zum einen ein *Stoffgesetz für die Wärmeströme*

$$h^k = -\lambda g^{+ki} T_{,i}, \quad (2.82)$$

das zum Einsatz kommt, wenn ein *Temperaturgefälle* existiert ($T_{,i} \neq 0$), und zum anderen ein *Entwicklungsgesetz zur Berechnung der plastischen Verzerrungen*

$$\overset{\bullet}{\Gamma}_{ik}^{IR} = \frac{\overset{+}{\rho}}{\frac{\partial V}{\partial \tau^{rs}} \tau^{rs}} \left(\frac{\partial V}{\partial \tau^{ik}} \overset{\bullet}{\tau}^{ik} + \frac{\partial V}{\partial T} \overset{\bullet}{T} \right) \frac{\partial V}{\partial \tau^{ik}}, \quad (2.83)$$

das zum Einsatz kommt, wenn bei *Belastungszunahme* ($\overset{\bullet}{F} > 0$) thermomechanische Belastungszustände auf der *Verfestigungsfläche*

$$V(\tau^{ik}, T, K) = 0 \quad (2.84)$$

erreicht werden. Das Entwicklungsgesetz (2.83) hängt maßgeblich von der isotropen Verfestigungsfunktion V ab, die man wegen (2.81)₁ auch in Abhängigkeit der Zustandsvariablen und K anschreiben kann:

$$V = \hat{V}^{RE}(\Gamma_{ik}^{IR}, T, K) \quad (2.85)$$

Zur Berechnung von V muss man also neben den Zustandsvariablen (im Momentanzustand), auch noch den Parameter K kennen, der von der *plastischen Arbeit* abhängt:

$$K = \hat{K}^{IR}(\overset{IR}{w}) \quad \text{mit} \quad \overset{IR}{w} = \frac{1}{\overset{+}{\rho}} \int_{t_0}^t \tau^{ik} \overset{\bullet}{\Gamma}_{ik}^{IR} Dt \quad (2.86)$$

Wir erkennen nun deutlich den Unterschied zwischen einer Zustandsgröße (z.B. τ^{ik}) und einer Prozessgröße $\overset{IR}{w}$: **Während sich eine Zustandsgröße allein aus den Zustandsvariablen des Momentanzustandes berechnen lässt, muss zur Berechnung der Prozessgröße auch die 'Vorgeschichte' bekannt sein.** Da die plastische Arbeit über K auch in V eingeht, zählen zu den

$$\text{Prozessgrößen: } \overset{IR}{w}, K, V, \overset{\bullet}{\Gamma}_{ik}^{IR} \text{ (und damit auch } \overset{IR}{\Gamma}_{ik}). \quad (2.87)$$

Für ihre Berechnung muss die gesamte Vorgeschichte - ausgehend vom Ausgangszustand zur Zeit t_0 - bekannt sein!

Im Folgenden wird die mit den Bewegungsgleichungen *gekoppelte Wärmeleitgleichung* abgeleitet: Diese ergibt sich nach längerer Rechnung, wenn man die Zustandsgleichungen (2.81) unter Beachtung von (1.2) in den 1.Hauptsatz (2.43) einsetzt:

$$\overset{+}{\rho} c \overset{\bullet}{T} + \frac{1}{\sqrt{\overset{+}{g}}} \left(h^k \sqrt{\overset{+}{g}} \right)_{,k} + \gamma T \overset{RE}{g}^{ik} \overset{\bullet}{\Gamma}_{ik}^{IR} - \tau^{ik} \overset{\bullet}{\Gamma}_{ik}^{IR} = \overset{+}{\rho} h. \quad (2.88)$$

Gemäß [19] gilt unter Verwendung von *Christoffelsymbolen*, die sich bei Ableitung der Basisvektoren im Ausgangszustand

$$\mathbf{g}_{m,i}^+ = \Gamma_{mi}^k \mathbf{g}_k^+ \quad (2.89)$$

ergeben: $(\sqrt{g^+})_{,k} = \Gamma_{ki}^i \sqrt{g^+}$. Somit kann der Term mit den Wärmeströmen in (2.88) bei Einführung der *kovarianten Ableitung* $(\dots)_k$ folgendermaßen vereinfacht werden:

$$\frac{1}{\sqrt{g^+}} \left(h^k \sqrt{g^+} \right)_{,k} = h_{,k}^k + \Gamma_{ki}^i h^k = h^k|_k. \quad (2.90)$$

Die Wärmeleitgleichung ist eine partielle Differenzialgleichung, die neben Orts- auch Zeitableitungen enthält. Die 'thermische Belastung' h , die Wärmequelle, haben wir auf der rechten Seite angeschrieben, da sie als bekannt vorausgesetzt wird. Abweichend von den üblichen Formulierungen in der Literatur (z.B. [4], [47]) gehen hier auch *mechanische Anteile* in die Wärmeleitgleichung ein. Diese wollen wir als *Kopplungsterme* bezeichnen, da sie die Kopplung mit den *Bewegungsgleichungen*²⁹ bewirken. Treten infolge dynamischer Formänderungen im Kontinuum elastische bzw. plastische Verzerrungsgeschwindigkeiten im Kontinuum auf, so haben sie Temperaturänderungen zur Folge. Dieser Sachverhalt lässt sich anschaulich zeigen, wenn man die Kopplungsterme auf die rechte Seite bringt und so tut, als seien sie vorgegeben:

$$\dot{\rho} c T + h^k|_k = \dot{\rho} h \underbrace{-\gamma T \dot{g}^{RE}_{ik} \Gamma_{ik}^i}_{\text{elast. Kopp.-term}} + \underbrace{\dot{\tau}^{ik} \Gamma_{ik}^{IR}}_{\text{plast. Kopp.-term}}. \quad (2.91)$$

Die Kopplungsterme können dann als *zusätzliche Wärmequellen* interpretiert werden. Der *plastische Kopplungsterm*, der wegen dem 2.Hauptsatz niemals negative Werte annehmen darf, repräsentiert die *mechanische Dissipation*: Plastische Arbeit wird in Wärme umgewandelt und bewirkt immer eine Aufheizen der Struktur.

In den *elastischen Kopplungsterm* gehen - wie schon oben bemerkt - zeitliche Änderungen der Größe $I = \dot{g}^{RE}_{ik} \Gamma_{ik}^i$ ein, mit der elastische Volumenänderungen beschrieben werden. Für ein Volumenelement kann man also schließen: Je nachdem, ob es zu einer Expansion, oder einer Kompression seines Volumens kommt, resultiert hieraus in seinem Inneren eine Abkühlung bzw. Aufheizung:

$$\text{elastische Kompression} \implies \text{Aufheizung}; \quad (2.92)$$

$$\text{elastische Expansion} \implies \text{Abkühlung}.$$

Bei Gasen, wo in der Regel große Volumenänderungen möglich sind, ist dieser Zusammenhang wohl bekannt: Man denke an das jedem geläufige Phänomen der Erwärmung einer Luftpumpe, wenn man das eingeschlossene Gasvolumen plötzlich - unter hohem Druck - komprimiert. Man kann an dieser Stelle schon den Schluß ziehen, dass konkrete Auswirkungen des *elastischen Kopplungsterms* mit

²⁹Impuls- und Drallerhaltung: (2.33)₄, (2.40).

- der jeweiligen Geschwindigkeit der Expansion bzw. Kompression
- und der Möglichkeit des Werkstoffs zu solchen Volumenänderungen

in Verbindung stehen. Bei inkompressiblen Werkstoffen (z.B. Gummi) spielt demnach der elastische Kopplungsterm überhaupt keine Rolle. Bei metallischen Werkstoffen ist - insbesondere bei dünnwandigen Strukturen unter schockartiger Beanspruchung - mit hohen Verzerrungsgeschwindigkeiten zu rechnen; die zu erwartenden Volumendilatationen sind jedoch - verglichen mit Gasen - gering.

Ziel der vorliegenden Arbeit wird es in den nachfolgenden Kapiteln sein, die thermoelastisch gekoppelten Grundgleichungen auf dünnwandige Flächentragwerke anzuwenden, ein geeignetes Lösungskonzept zu entwickeln, um die komplizierten und miteinander gekoppelten Differenzialgleichungen einer numerischen Lösung zuzuführen, und schließlich Ergebnisse aus konkreten numerischen Berechnungen darzustellen. Besonderes Augenmerk wird darauf gelegt, die Auswirkungen des elastischen Kopplungsterms, der in der Regel vernachlässigt wird, zu analysieren und zu diskutieren. Plastische Deformationen werden von vornherein ausgeschlossen³⁰, so dass bei Entlastung keine bleibenden Verzerrungen in der untersuchten Struktur zurückbleiben.

³⁰Thermo-plastisch gekoppelte Berechnungen, bei denen die Auswirkungen des plastischen Kopplungsterms untersucht werden, finden sich z.B. in [72] und [54]. Insbesondere in der *Umformtechnik*, wo es zu großen plastischen Deformationen kommt, sind solche Untersuchungen von großem Interesse.

Kapitel 3

Die Anwendung der thermoelastischen Grundgleichungen auf dünnwandige Flächentragwerke

Die hier dargestellte Vorgehensweise mit den jeweiligen Bezeichnungen ist stark angelehnt an [12]. Das Augenmerk richtet sich insbesondere auf die Mitnahme zusätzlicher thermischer Effekte in den Schalengleichungen, die in [12] nicht berücksichtigt werden. Am Ende von Kapitel 3 wird dann auch der elastische Kopplungsterm in der Wärmeleitgleichung (2.91) durch konstitutive mechanische Variablen der Schalentheorie ausgedrückt. Wir werden uns hier lediglich auf die wesentlichen Zusammenhänge einer Schalentheorie konzentrieren, die auf der Normalenhypothese von Kirchhoff-Love basiert. Viele Gleichungen, die für ein grundlegendes Verständnis von untergeordneter Bedeutung sind, sind im Anhang B dargestellt. Hier und auch in den anschließenden Kapiteln 4 und 5 wird an einigen Stellen auf die formelmäßige Darstellung detaillierter Herleitungen verzichtet und auf [12] bzw. [26] verwiesen. *Geometrische Nichtlinearitäten* in den Komponenten v^k des Verschiebungsvektors¹ werden - in Anlehnung an [12] - konsequent in die Schalengleichungen eingearbeitet, wodurch auch die Formulierung einer *thermomechanisch gekoppelten Stabilitätstheorie für Schalen* in Kapitel 5 ermöglicht wird.

Unter *Flächentragwerken* versteht man gemäß [5] „dreidimensionale Kontinua, deren Dickenabmessung h wesentlich kleiner ist, als die Erstreckung in den übrigen Richtungen“. Ein beliebig gekrümmtes Flächentragwerk wird auch als Schale bezeichnet. Die *Laibungsflächen* verlaufen im Abstand h und grenzen das Tragwerk von seiner Umgebung ab. Als weitere *Begrenzungsflächen* kommen noch die *Randflächen* hinzu, siehe Abbildung 7.6. Eine gedachte Fläche, die die Dicke h an jeder Stelle halbiert, bezeichnet man als *Mittelfläche*; ihr Schnitt mit den Randflächen beschreibt eine Kurve: der

¹Siehe Abbildung 3.1.

Rand s des Flächentragwerks.

Im Rahmen *zweidimensionaler Modelltheorien* der Mechanik wird versucht, den *Schalenraum* ausgehend von der Mittelfläche zu erfassen. Mit dieser Vorgehensweise gelingt dann die Einführung von *Schnittgrößen* und *konstitutiven Variablen*, die auf die Mittelfläche bezogen sind. Während die Schnittgrößen dazu dienen, die aufgebrachten Lasten flächenhaft abzutragen, werden durch die konstitutiven Variablen *Verzerrungen* und verformungsbedingte *Krümmungsänderungen* der Mittelfläche erfaßt.

Wie zu Beginn von Kapitel 2 erläutert, werden materielle Punkte des Kontinuums im Ausgangszustand durch Angabe eines Richtungsvektors im Euklidischen Vektorraum festgelegt. Gemäß (2.1) läßt sich dieser Richtungsvektor durch *krummlinige Koordinaten* θ^k ausdrücken. In der Schalentheorie geht man dann üblicherweise so vor, dass man materielle Punkte auf der Mittelfläche allein durch Angabe der ersten beiden Koordinaten θ^α ($\alpha = 1, 2$) identifiziert. Für den Richtungsvektor eines solchen Punktes $\overset{+}{P}$ gilt dann:

$$\overset{+}{\mathbf{r}}(\theta^\alpha) = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = x^r(\theta^\alpha) \mathbf{e}_r. \quad (3.1)$$

Im unverformten Ausgangszustand wird die Mittelfläche also durch die krummlinigen Koordinaten θ^α beschrieben, siehe Abbildung 7.6.

Analog zu der Vorgehensweise im Kontinuum, siehe (2.2), soll hier in jedem materiellen Punkt der Mittelfläche im Ausgangs- sowie im Momentanzustand eine *lokale Basis* errichtet werden:

$$\overset{+}{\mathbf{a}}_\alpha = \frac{\partial \overset{+}{\mathbf{r}}}{\partial \theta^\alpha} ; \quad \mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^\alpha}. \quad (3.2)$$

Die *kovarianten Basisvektoren der Mittelfläche* ($\overset{+}{\mathbf{a}}_\alpha$ und \mathbf{a}_α) werden im Ausgangs- sowie im verformten Momentanzustand wie die Basisvektoren im Kontinuum (hier der Schalenraum) jeweils tangential an ihre zugehörigen Parameterlinien errichtet, siehe Abbildung 3.1.

Um auch materielle Punkte im Schalenraum identifizieren zu können, führt man dann noch die im Ausgangszustand (\pm) stets geradlinige Koordinate θ^3 ($-\frac{h}{2} \leq \theta^3 \leq \frac{h}{2}$) ein, die jeweils den von $\overset{+}{P}$ aus gemessenen Abstand zur Mittelfläche angibt:

$$\overset{+}{\mathbf{R}}(\theta^k) = \overset{+}{\mathbf{r}}(\theta^\alpha) + \theta^3 \overset{+}{\mathbf{a}}_3(\theta^\alpha). \quad (3.3)$$

In diesem Zusammenhang bezeichnet $\overset{+}{\mathbf{a}}_3$ einen *Normaleneinheitsvektor*, der senkrecht auf der Mittelfläche steht und die Länge 1 hat. Dann muss mit den Regeln der Vektorrechnung gelten:

$$\overset{+}{\mathbf{a}}_3 = \frac{\overset{+}{\mathbf{a}}_1 \times \overset{+}{\mathbf{a}}_2}{\left| \overset{+}{\mathbf{a}}_1 \times \overset{+}{\mathbf{a}}_2 \right|}. \quad (3.4)$$

Im anschließenden Abschnitt werden wir sehen, dass man bei Verwendung der *Normalenhypothese* zu (3.3) und (3.4) analoge Beziehungen für den verformten Momentanzustand formulieren kann.

3.1 Die Normalenhypothese von Kirchhoff-Love

Ausgehend von der in der Stabtheorie schon seit längerem bekannten *Bernoulli-Hypothese* hat Kirchhoff im Jahre 1850 für Plattentragwerke postuliert², dass „jede Normale zur unverformten Plattenebene auch im verformten Zustand ihre Normaleneigenschaft bezüglich der Mittelfläche beibehält und außerdem ihre Länge nicht ändert.“

Mit der *Kirchhoff-Love-Hypothese* gelingt eine Verallgemeinerung der *Normalenhypothese*, und somit eine Übertragung auf beliebig gekrümmte Schalen: Man fordert, dass jede Normale zur unverformten Schalenmittelfläche nach Aufbringen beliebiger Belastungen wieder senkrecht auf der verformten Mittelfläche steht. Die Normalenhypothese ist in Abbildung 3.1 graphisch dargestellt.

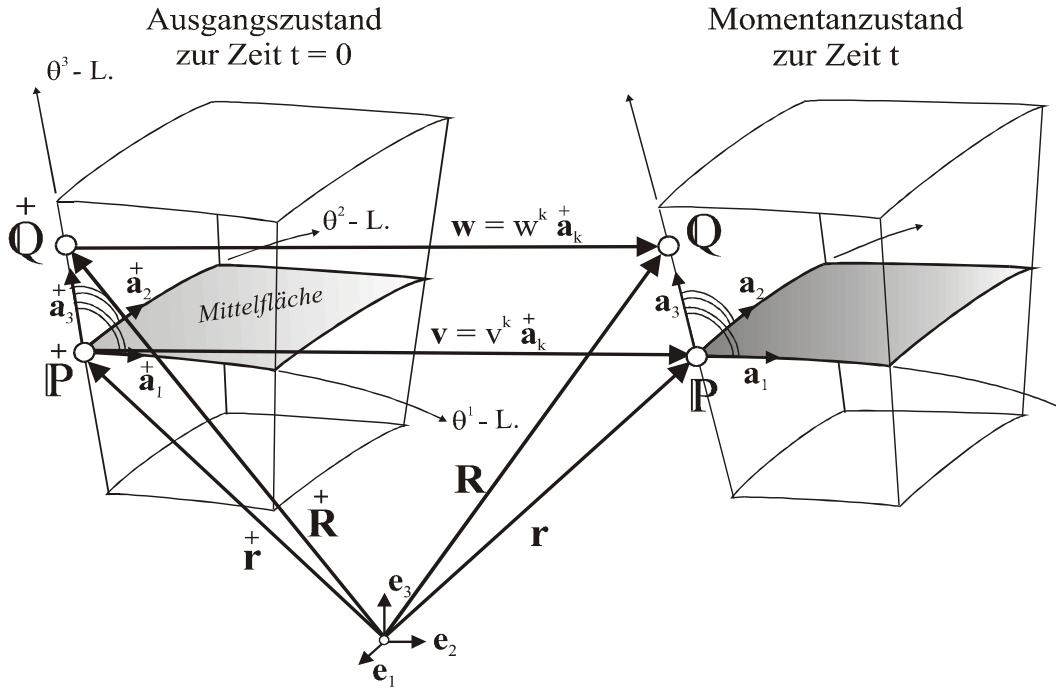


Abbildung 3.1: Kirchhoff-Kinematik

Eine durch die Punkte $\overset{+}{P}$ und $\overset{+}{Q}$ festgelegte Normale zur Mittelfläche steht also im Momentanzustand wieder *normal* zu der durch die Basisvektoren \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 aufgespannten Tangentialebene in P . Somit kann auch im verformten Zustand der in Richtung der geradlinigen Dickenkoordinate θ^3 zeigende *Normaleneinheitsvektor* analog zu (3.4) bestimmt werden:

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}. \quad (3.5)$$

Der Ortsvektor des Punktes Q im Schalenraum ergibt sich dann zu

$$\mathbf{R}(\theta^k, t) = \mathbf{r}(\theta^\alpha, t) + \theta^3 \mathbf{a}_3(\theta^\alpha, t). \quad (3.6)$$

²Siehe [5].

Man erkennt nun den praktischen Vorteil, der sich aus der Normalenhypothese ergibt und der für alle folgenden Grundgleichungen der hier formulierten Schalentheorie bestimmend wird: Die im Schalenraum auftretenden Verformungen können durch Verformungen der Mittelfläche ausgedrückt werden; so gilt - wie in Abbildung 3.1 veranschaulicht - für die Verschiebung eines beliebigen Punktes Q des Schalenraumes:

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \theta^3 \left(\mathbf{a}_3 - {}^+\mathbf{a}_3 \right) . \quad (3.7)$$

Berücksichtigt man (3.3) und (3.6) in (2.2), so erhält man die folgenden *Transformationsvorschriften*, die die Basisvektoren der Mittelfläche auf die Basisvektoren im Schalenraum abbilden:

$$\begin{aligned} {}^+\mathbf{g}_\alpha &= \left(\delta_\alpha^\beta - \theta^3 {}^+b_\alpha^\beta \right) {}^+\mathbf{a}_\beta = {}^+\mu_\alpha^\beta {}^+\mathbf{a}_\beta \quad \text{und} \quad {}^+\mathbf{g}_3 = {}^+\mathbf{a}_3 \quad (\text{im Ausgangszustand}); \\ \mathbf{g}_\alpha &= \left(\delta_\alpha^\beta - \theta^3 b_\alpha^\beta \right) \mathbf{a}_\beta = \mu_\alpha^\beta \mathbf{a}_\beta \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 \quad (\text{im Momentanzustand}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

In die Transformationsgröße ${}^+\mu_\alpha^\beta$, den *Shifter*, geht der *Krümmungstensor* ${}^+b_\alpha^\beta$ ein, er lässt sich aus den Basisvektoren der Mittelfläche im Ausgangszustand ableiten, siehe (B.4). Entsprechendes gilt für den Shifter μ_α^β des Momentanzustandes.

Im Sinne der Normalenhypothese sind *Schub-* und *Querverzerrungen* ausgeschlossen:

$$\Gamma_{3\alpha} = \Gamma_{\alpha 3} = 0; \quad \Gamma_{33} = 0 . \quad (3.9)$$

Die verbleibenden Verzerrungen im Schalenraum, die hier immer reversibel - also elastisch - sein sollen, können dann wegen (3.8) aus Deformationen der Mittelfläche berechnet werden. Gemäß (2.42) gilt:

$$\overset{RE}{\Gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(g_{\alpha\beta} - {}^+g_{\alpha\beta} \right) . \quad (3.10)$$

Ein wichtiges Merkmal einer Schalentheorie, die sich der Normalenhypothese bedient, ist die Tatsache, dass wegen der verschwindenden Schubverzerrungen ($\Gamma_{\alpha 3} = 0$) keine auf die Mittelfläche bezogenen Stoffgesetze - wir sprechen in diesem Zusammenhang von *konstitutiven Gleichungen* - für die *Querkräfte* $n^{\alpha 3}$ formuliert werden können: Es existieren dann keine den Querkräften zugeordneten Deformationen³.

Anmerkung:

Die Forderung $\Gamma_{33} = 0$, wonach sich die Länge der Normalen (Abstand \overline{PQ}) nicht ändern darf, wird üblicherweise fallengelassen, um einen zweidimensionalen Spannungszustand $\tau^{\alpha\beta}$ im Schalenraum realisieren zu können. Ausgehend vom thermoelastischen Stoffgesetz für die Spannungen führt die Forderung $\tau^{33} = 0$ dann zu einer konkreten Formulierung für Γ_{33} , siehe Abschnitt 3.3.

³Bei einer Schalentheorie, die auch unabhängige Verdrehungen des *Direktors* (Verbindungsgerade von P nach Q , siehe Abbildung 3.1) zulässt, besteht diese Problematik nicht! Man spricht in diesem Zusammenhang von einer *Cosserat-Fläche*, siehe [5].

3.2 Die Bewegungsgleichungen

In Kapitel 2.1.4 wird gezeigt, wie sich die Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik aus der Invarianzforderung ergeben. Diese Vorgehensweise ist zwar etwas aufwendig, zeigt aber die übergeordnete Stellung der Thermodynamik. Üblicherweise werden jedoch die *Bewegungsgleichungen im Dreidimensionalen*⁴ aus dem sogenannten *dynamischen Gleichgewicht* am Volumenelement ermittelt, wobei die Einführung der *D'Alembertschen Trägheitskraft* $-d^+m\ddot{\mathbf{w}}$ notwendig wird, siehe [26].

Momentanzustand zur Zeit t:

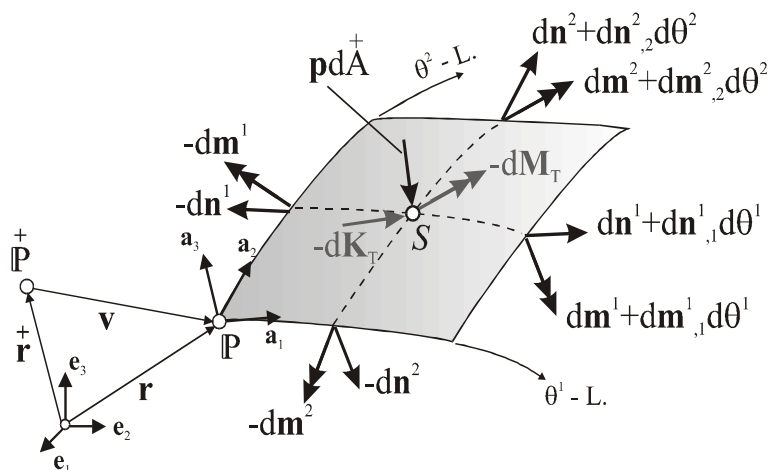


Abbildung 3.2: Element der Mittelfläche mit Schnitt-, Last- und Trägheitsgrößen

Eine ähnliche Vorgehensweise wird im Folgenden gewählt, um auf einfachem Wege die *Bewegungsgleichungen der Schalentheorie* aufzustellen: Für ein Element der Mittelfläche werden *infinitesimale Schnittkraft- und Schnittmomentenvektoren* $d\mathbf{n}^\alpha$ und $d\mathbf{m}^\alpha$, sowie 'Trägheitswirkungen' - in Gestalt einer *Trägheitskraft* ($-d\mathbf{K}_T$) und eines *Trägheitsmomentes* ($-d\mathbf{M}_T$) - eingeführt, in dem über die jeweiligen infinitesimalen Anteile im Schalenraum integriert wird: Formelmäßig werden diese Beziehungen unten dargestellt, siehe (3.12)-(3.14).

Trägt man neben all diesen auf die Mittelfläche bezogenen Größen noch eine *richtungstreue äußere Flächenlast*⁵ \mathbf{p} an einem Element der Mittelfläche an, siehe Abbildung 3.2, an, so liefern die vektoriellen Kräfte- und Momentengleichgewichtsbedingungen die folgenden *Bewegungsgleichungen*:

$$dn_{,1}^1 d\theta^1 + dn_{,2}^2 d\theta^2 + \mathbf{p} dA^+ = d\mathbf{K}_T \quad (\text{Impulserhaltung}); \quad (3.11)$$

$$d\mathbf{m}_1^1 d\theta^1 + d\mathbf{m}_2^2 d\theta^2 + \mathbf{a}_1 d\theta^1 \times d\mathbf{n}^1 + \mathbf{a}_2 d\theta^2 \times d\mathbf{n}^2 = d\mathbf{M}_T \quad (\text{Drallerhaltung}).$$

⁴Vektoriell: (2.34),(2.40) und in Komponentenform: (2.33)₄, (2.39).

⁵*Nichtrichtungstreue äußere Flächenlasten* werden hier - im Gegensatz zu den Formulierungen in [12] - nicht berücksichtigt. Gleiches gilt für *nichtrichtungstreue Randlasten*. Bei dünnen Schalen kann gemäß [12] die Flächenlast \mathbf{p} näherungsweise „als in der Mittelfläche angreifend“ angenommen werden.

Das Momentengleichgewicht (3.11)₂ ist hier auf den Mittelpunkt S des Schalenelementes bezogen.

Wie in [12] ausführlicher gezeigt wird, ergeben sich die an einem Schalenelement angreifenden *infinitesimalen Schnittkraftvektoren* durch Integration über die jeweiligen Schnittkraftvektoren im Schalenraum. Es folgt dann unter Beachtung von (2.8/9):

$$d\mathbf{n}^1 = d\theta^2 \int_{-h/2}^{h/2} \tau^{1k} \mathbf{g}_k \sqrt{g^+} d\theta^3 = d\theta^2 \mathbf{n}^1 ; \quad d\mathbf{n}^2 = d\theta^1 \int_{-h/2}^{h/2} \tau^{2k} \mathbf{g}_k \sqrt{g^+} d\theta^3 = d\theta^1 \mathbf{n}^2 . \quad (3.12)$$

Die 'Momentenwirkungen' erhält man unter Berücksichtigung des (vektoriellen) Abstandes $\theta^3 \mathbf{a}^3$ zur Mittelfläche. Die *infinitesimalen Schnittmomentenvektoren* am Schalenelement folgen dann zu

$$\begin{aligned} d\mathbf{m}^1 &= d\theta^2 \left(\mathbf{a}_3 \times \int_{-h/2}^{h/2} \tau^{1k} \mathbf{g}_k \sqrt{g^+} \theta^3 d\theta^3 \right) = d\theta^2 (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{m}^1) ; \\ d\mathbf{m}^2 &= d\theta^1 \left(\mathbf{a}_3 \times \int_{-h/2}^{h/2} \tau^{2k} \mathbf{g}_k \sqrt{g^+} \theta^3 d\theta^3 \right) = d\theta^1 (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{m}^2) . \end{aligned} \quad (3.13)$$

In (3.12) und (3.13) bezeichnen die Größen \mathbf{n}^1 , \mathbf{n}^2 , \mathbf{m}^1 und \mathbf{m}^2 vektorielle Schnittgrößen, die auf 'nicht-physikalische' Längeneinheiten bezogen sind.

Zur Aufrechterhaltung des dynamischen Gleichgewichts am Schalenelement führen wir *infinitesimale Trägheitskräfte* und *-momente* ein. Diese ergeben sich - analog zu der Vorgehensweise in (3.12) und (3.13) - durch Integration über alle infinitesimalen Trägheitskräfte im Schalenraum. Bei Integration über die Dicke h folgt also:

$$\begin{aligned} d\mathbf{K}_T &= \int_{-h/2}^{h/2} \ddot{\mathbf{w}}^+ \rho \sqrt{g^+} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = \mathbf{K}_T d\theta^1 d\theta^2 \\ d\mathbf{M}_T &= \int_{-h/2}^{h/2} \theta^3 \mathbf{a}_3 \times \ddot{\mathbf{w}}^+ \rho \sqrt{g^+} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = \mathbf{a}_3 \times \mathbf{M}_T d\theta^1 d\theta^2 . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Unter Beachtung von (3.12)-(3.14) können die *vektoriellen Bewegungsgleichungen* (3.11) folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\mathbf{n}_{,\alpha}^\alpha + \mathbf{p} \sqrt{a^+} = \mathbf{K}_T ; \quad (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{m}^\alpha)_{,\alpha} + \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{n}^\alpha = \mathbf{a}_3 \times \mathbf{M}_T . \quad (3.15)$$

Zerlegt man nun die hier vertretenen vektoriellen Größen in Richtung der Basisvektoren der Mittelfläche - siehe (B.15) - so gelingt die Darstellung der vektoriellen Bewegungsgleichungen in Form von *Komponentengleichungen* in Richtung der Basisvektoren \mathbf{a}_m^+

des unverformten Ausgangszustandes⁶:

$$\begin{aligned} n^{\alpha m}|_{\alpha} + \underline{\Delta n^{\alpha m}}|_{\alpha} + p^m &= K_T^m \quad (m = 1, 2, 3); \\ m^{\alpha\beta}|_{\alpha} + \underline{\Delta m^{\alpha\beta}}|_{\alpha} - n^{\beta 3} - \underline{n^{\alpha 3} \left(\Phi_{\alpha}^{\beta} - \psi_{\alpha}^{\beta} \right) - \chi_3^{\beta} \Delta m^*} &= M_T^{\beta} + \underline{\chi_3^{\beta} M_T^3} \quad (\beta = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die zu \mathbf{a}_3^+ gehörende Komponentengleichung aus (3.15)₂ ist in (3.16) nicht aufgeführt. Man spricht in diesem Zusammenhang vom *Gleichgewicht gegen Verdrehen um die Schalennormale*. Es wird bei Einführung einer *symmetrischen Schnittgröße* $s^{\alpha\beta}$ erfüllt, siehe Anhang B.

Die unterstrichenen Terme in (3.16) sind auf die *Schiefstellung der Basisvektoren* beim Übergang vom Ausgangs- in den Momentanzustand zurückzuführen. Hieraus resultieren *geometrische Nichtlinearitäten* in den Komponenten v^k des Verschiebungsvektors.

In Zusammenhang mit der Behandlung von mechanischen Randbedingungen in Abschnitt 4.2 werden wir auch Gleichgewichtsbedingungen bzw. *Bewegungsgleichungen am Rande* formulieren. In diesem Zusammenhang ist - zwecks einer Unterscheidung - die Bezeichnung '*Bewegungsgleichungen im Gebiet*' für (3.16) üblich.

In (3.12) und (3.13) werden vektorielle Schnittkräfte \mathbf{n}^{α} und -momente \mathbf{m}^{α} der Mittelfläche eingeführt, indem über Spannungen im Schalenraum integriert wird. Da für diese Spannungen ein Stoffgesetz formuliert wird - siehe (2.81)₁ - kann man an dieser Stelle schon schließen, dass Stoffgesetze auch für die in (3.16) enthaltenen Komponenten $n^{\alpha\beta}$ und $m^{\alpha\beta}$ der vektoriellen Schnittgrößen existieren müssen. Solche Stoffgesetze bezeichnen wir als *konstitutive Gleichungen der Schalentheorie*, sie werden im nachfolgenden Abschnitt behandelt. Da, wie schon oben angesprochen, bei Verwendung der Normalenhypothese für die *Querkräfte* $n^{\alpha 3}$ solche Gleichungen nicht angegeben werden können, verbleiben die Querkräfte in den Bewegungsgleichungen (3.16) als unabhängige Variablen.

3.3 Die konstitutiven Gleichungen für die Schnittgrößen

Grundlage der konstitutiven Beziehungen bildet hier das im Dreidimensionalen formulierte thermoelastische Stoffgesetz für die Spannungen, das sich bei *hyperelastischem Materialverhalten* aus einer Potenzialfunktion (hier für die freie Energie) ableiten lässt. Das Stoffgesetz für die Spannungen - in Gestalt einer Zustandsgleichungen - sei hier

⁶In Anhang B findet sich die Auswertung der mit $(...)|_{\alpha}$ bezeichneten *kovarianten Ableitungen* sowie die jeweilige formelmäßige Bedeutung der Größen $\Delta n^{\alpha m}$, $\Delta m^{\alpha\beta}$, Φ_{α}^{β} , ψ_{α}^{β} , χ_3^{β} , Δm^* , K_T^m und M_T^m , siehe (B.21) bis (B.25).

noch einmal angeschrieben. Gemäß (2.81)₁ und (2.56)_{2/3} gilt:

$$\tau^{ik} = E^{ikrs} \Gamma_{rs} - \gamma (T - T_0) \overset{+}{g}^{ik} \quad (3.17)$$

$$\text{mit } E^{ikrs} = G \left[\overset{+}{g}^{ir} \overset{+}{g}^{ks} + \overset{+}{g}^{is} \overset{+}{g}^{kr} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \overset{+}{g}^{ik} \overset{+}{g}^{rs} \right] \quad \text{und} \quad \gamma = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T .$$

Die konstitutiven Gleichungen der Schalentheorie sollen hier gemäß dem in [12] beschrittenen Weg aus einer *globalen Formulierung für die Formänderungsleistung* - siehe (2.41) - abgeleitet werden⁷:

$$\dot{\mathcal{W}}_G = \int_{(\overset{+}{V})} \tau^{ik} \dot{\Gamma}_{ik} d\overset{+}{V} . \quad (3.18)$$

Mit der Integration über alle Volumenelemente bezeichnet $\dot{\mathcal{W}}_G$ die gesamte Formänderungsleistung eines Schalentragwerks mit dem Volumen $\overset{+}{V}$ im Ausgangszustand.

Wie schon am Ende von Abschnitt 3.1 angemerkt, wird die im Rahmen der Normalenhypothese aufgestellte Forderung nach verschwindenden Querverzerrungen ($\Gamma_{33} = 0$) fallengelassen, da hieraus Normalspannungen τ^{33} resultieren würden, die im Widerspruch zu einem zweidimensionalen Spannungszustand stehen. Durch Nullsetzen dieser Normalspannungen ($\tau^{33} = 0$) folgt aus dem thermoelastischen Stoffgesetz unter Beachtung von $\overset{+}{g}^{3\alpha} = \overset{+}{g}^{\alpha 3} = 0$ und $\overset{+}{g}^{33} = 1$:

$$\Gamma_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} \overset{+}{g}^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha (T - T_0) . \quad (3.19)$$

Da somit in $\dot{\mathcal{W}}_G$ alle Komponenten in 3-Richtung verschwinden, kann man mit (B.11)₁ anschreiben:

$$\dot{\mathcal{W}}_G = \int_{(\overset{+}{V})} \tau^{\alpha\beta} \dot{\Gamma}_{\alpha\beta} d\overset{+}{V} = \int_{(\overset{+}{A})} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \tau^{\alpha\beta} \dot{\Gamma}_{\alpha\beta} \overset{+}{\mu} d\theta^3 \right] d\overset{+}{A} . \quad (3.20)$$

Wie in [12] ausführlicher gezeigt wird, kann (3.20) unter Beachtung der Symmetrie des Spannungstensors $\tau^{\alpha\beta} = \tau^{\beta\alpha}$ durch Größen der Mittelfläche $\overset{+}{A}$ dargestellt werden:

$$\dot{\mathcal{W}}_G = \int_{(\overset{+}{A})} \left[s^{\rho\lambda} \dot{\gamma}_{\rho\lambda} + m^{\alpha\lambda} \dot{\kappa}_{\alpha}^{\rho} a_{\rho\lambda} \right] d\overset{+}{A} \quad (3.21)$$

Neben den Schnittgrößen $s^{\rho\lambda}$ und $m^{\alpha\lambda}$ sind im *Leistungssatz* zeitliche Ableitungen der Größen $\gamma_{\rho\lambda}$ und κ_{α}^{ρ} enthalten; diese sind deutbar als *Verzerrungen und verformungsbedingte Krümmungsänderungen der Mittelfläche*. In der Schalentheorie werden sie auch

⁷Diese globale Formulierung wird auch als *Leistungssatz der Mechanik* bezeichnet; wird das Phänomen *Wärme* nicht berücksichtigt, so ergibt er sich aus dem 1.Hauptsatz.

als *konstitutive Variablen* bezeichnet. Gemäß [12] berechnen sie sich nach den folgenden Vorschriften:

$$\gamma_{\rho\lambda} = \frac{1}{2} \left(a_{\rho\lambda} - \overset{+}{a}_{\rho\lambda} \right) ; \quad \kappa_{\alpha}^{\rho} = -b_{\alpha}^{\rho} + \overset{+}{b}_{\alpha}^{\rho} . \quad (3.22)$$

Im Sinne einer thermoelastischen Theorie werden wir an späterer Stelle auch noch (thermische) konstitutive Variablen einführen, mit denen auf die Mittelfläche bezogene Temperaturänderungen beschrieben werden. Zwecks einer Unterscheidung wollen wir deshalb die Größen $\gamma_{\rho\lambda}$ und κ_{α}^{ρ} *mechanische konstitutive Variablen* nennen.

Die *Schnittgrößen* $s^{\rho\lambda}$ und $m^{\alpha\lambda}$ in (3.21) ergeben sich durch Integration der Spannungen im Schalenraum über die Dicke h zu

$$s^{\rho\lambda} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau^{\alpha\beta} \mu_{\alpha}^{\rho} \mu_{\beta}^{\lambda} \overset{+}{\mu} d\theta^3 \quad \text{und} \quad m^{\alpha\lambda} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau^{\alpha\beta} \mu_{\beta}^{\lambda} \overset{+}{\mu} \theta^3 d\theta^3 . \quad (3.23)$$

Wegen $\tau^{\alpha\beta} = \tau^{\beta\alpha}$ kann in (3.23)₁ gezeigt werden, dass die Schnittgröße $s^{\rho\lambda}$ symmetrisch sein muss:

$$s^{\rho\lambda} = s^{\lambda\rho} . \quad (3.24)$$

Die Symmetrieeigenschaft der Schnittgröße $s^{\rho\lambda}$ folgt somit aus dem Prinzip der Drallhaltung bzw. aus der Invarianz der inneren Energie gegenüber einer überlagerten Starrkörperrotation, siehe Abschnitt 2.1.4. Das in Anhang B behandelte *Gleichgewicht gegenüber Verdrehung um die Schalennormale*, siehe (B.16)-(B.18), bestätigt diese Symmetrieeigenschaft.

Da gemäß [12] im Rahmen einer *in den konstitutiven Variablen linearen Theorie*

$$s^{\rho\lambda} = n^{\rho\lambda} - \overset{+}{b}_{\alpha}^{\rho} m^{\alpha\lambda} \quad (3.25)$$

gesetzt werden kann, erhält man mit (3.23) und (B.2)₃ für die *Membrankomponenten*:

$$n^{\rho\lambda} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau^{\alpha\beta} \delta_{\alpha}^{\rho} \mu_{\beta}^{\lambda} \overset{+}{\mu} d\theta^3 . \quad (3.26)$$

Als *konstitutive Gleichungen* bezeichnen wir Stoffgesetze für die Schnittgrößen $s^{\alpha\beta}$, $n^{\alpha\beta}$ und $m^{\alpha\beta}$, die sich - wie wir oben gesehen haben - durch Integration über die zweidimensionalen Spannungen ergeben. Zur Formulierung dieser Gleichungen benötigen wir nun noch ein Stoffgesetz für $\tau^{\alpha\beta}$, das sich ergibt, wenn man (3.9)₁ und (3.19) in (3.17) einbaut⁸:

$$\tau^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta\rho\lambda} \gamma_{\rho\lambda} - \gamma^* (T - T_0) \overset{+}{g}^{\alpha\beta} \quad (3.27)$$

$$\text{mit} \quad H^{\alpha\beta\rho\lambda} = G \left[\overset{+}{g}^{\alpha\rho} \overset{+}{g}^{\beta\lambda} + \overset{+}{g}^{\alpha\lambda} \overset{+}{g}^{\beta\rho} + \frac{2\nu}{1-\nu} \overset{+}{g}^{\alpha\beta} \overset{+}{g}^{\rho\lambda} \right] \quad \text{und} \quad \gamma^* = 2G \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T$$

⁸Unter Verwendung des *Elastizitätsmoduls* E gilt wegen $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$: $\gamma^* = \frac{E\alpha_T}{1-\nu}$.

Im Sinne einer sauberen Trennung zwischen mechanischen und thermischen Anteilen in den konstitutiven Gleichungen wollen wir damit beginnen, in dem obigen Stoffgesetz verformungs- und temperaturbedingte Anteile in den Spannungen durch unterschiedliche Bezeichnungen zu markieren: Verformungsbedingte, mechanische Spannungen wollen wir mit einem aufgesetzten '*' und temperaturbedingte Spannungen mit einem aufgesetzten 'T' markieren. Dann gilt:

$$\tau^{\alpha\beta} = \overset{*}{\tau}^{\alpha\beta} + \overset{T}{\tau}^{\alpha\beta} \quad \text{mit} \quad \overset{*}{\tau}^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta\rho\lambda}\gamma_{\rho\lambda}, \quad \overset{T}{\tau}^{\alpha\beta} = -\gamma^*(T - T_0) \overset{+}{g}^{\alpha\beta}. \quad (3.28)$$

Mit (3.28) wird ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen, bzw. Temperaturänderungen beschrieben. Analog hierzu sollen, ausgehend von den Integralgleichungen in (3.23) und (3.26), auch wieder lineare Beziehungen zwischen Schnittgrößen und - auf die Mittelfläche bezogenen - Verformungen bzw. Temperaturänderungen aufgestellt werden. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einer *in den konstitutiven Variablen linearen Theorie*. In diesem Sinne werden in (3.23) und (3.26) die Shifter des Momentanzustandes μ_β^α durch diejenigen des Ausgangszustandes ersetzt. Wegen (3.28) gelingen dann für die Schnittgrößen der Mittelfläche die folgenden *additiven Aufspaltungen*:

$$s^{\rho\lambda} = \overset{*}{s}^{\rho\lambda} + \overset{T}{s}^{\rho\lambda}, \quad n^{\rho\lambda} = \overset{*}{n}^{\rho\lambda} + \overset{T}{n}^{\rho\lambda} \quad \text{und} \quad m^{\rho\lambda} = \overset{*}{m}^{\rho\lambda} + \overset{T}{m}^{\rho\lambda} \quad (3.29)$$

Die jeweiligen *verformungs-* und *temperaturbedingten Anteile* berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} \overset{*}{s}^{\rho\lambda} &= \int_{-h/2}^{h/2} \overset{*}{\tau}^{\alpha\beta} \overset{+}{\mu}_\alpha^\rho \overset{+}{\mu}_\beta^\lambda \overset{+}{\mu} d\theta^3; & \overset{T}{s}^{\rho\lambda} &= \int_{-h/2}^{h/2} \overset{T}{\tau}^{\alpha\beta} \overset{+}{\mu}_\alpha^\rho \overset{+}{\mu}_\beta^\lambda \overset{+}{\mu} d\theta^3; \\ \overset{*}{n}^{\rho\lambda} &= \int_{-h/2}^{h/2} \overset{*}{\tau}^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\rho \overset{+}{\mu}_\beta^\lambda \overset{+}{\mu} d\theta^3; & \overset{T}{n}^{\rho\lambda} &= \int_{-h/2}^{h/2} \overset{T}{\tau}^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\rho \overset{+}{\mu}_\beta^\lambda \overset{+}{\mu} d\theta^3; \\ \overset{*}{m}^{\rho\lambda} &= \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \overset{*}{\tau}^{\rho\beta} \overset{+}{\mu}_\beta^\lambda \overset{+}{\mu} \theta^3 d\theta^3}_{\text{verformungsbedingt}}; & \overset{T}{m}^{\rho\lambda} &= \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \overset{T}{\tau}^{\rho\beta} \overset{+}{\mu}_\beta^\lambda \overset{+}{\mu} \theta^3 d\theta^3}_{\text{temperaturbedingt}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Setzt man hier die Stoffgesetze (3.28) ein, so ergeben sich die *konstitutiven Gleichungen für die Schnittgrößen* in ihrer endgültigen Form. Wir werden in den beiden anschließenden Abschnitten die verformungsbedingten, mechanischen Anteile und die temperaturbedingten Anteile getrennt behandeln.

3.3.1 Verformungsbedingte Anteile

In [12] werden die konstitutiven Gleichungen für die verformungsbedingten Schnittgrößen unter Einsatz der Normalenhypothese formuliert: Ausgehend von dem elastischen Stoffgesetz für den 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor $\overset{*}{\tau}^{ik} = E^{ikrs}\gamma_{rs}$ wird sehr ausführlich gezeigt, wie man aus dem Leistungssatz der Mechanik *energiekonsistente⁹ Approximationsstufen* für die (verformungsbedingten) Schnittgrößen der Schalenmittelfläche entwickeln kann.

⁹Zur *Energiekonsistenz* siehe Abschnitt 3.3.3.

Dieses Verfahren beruht auf einer systematischen Approximation gemäß den in der Schnittgröße $\overset{*}{s}^{\alpha\beta}$ enthaltenen Krümmungsanteilen. Im Rahmen einer in den konstitutiven Variablen $\gamma_{\rho\lambda}$ und $\kappa_{\rho\lambda}$ (es gilt: $\kappa_{\rho\lambda} = \kappa_{\lambda}^{\alpha} \overset{+}{a}_{\alpha\lambda}$) linearen Theorie liefert - wie in [12] ausführlich gezeigt wird - die Auswertung von (3.30)₁ die folgende *konstitutive Gleichung für die symmetrische Schnittgröße*:

$$\begin{aligned} \overset{*}{s}^{\rho\lambda} &= \overset{*}{s}_{(0)}^{\rho\lambda} + \overset{*}{s}_{(1)}^{\rho\lambda} + \overset{*}{s}_{(2)}^{\rho\lambda} \\ \text{mit } \overset{*}{s}_{(0)}^{\rho\lambda} &= DG^{\rho\lambda\epsilon\gamma} \gamma_{\epsilon\gamma}, \quad \overset{*}{s}_{(1)}^{\rho\lambda} = BG^{\rho\lambda\tau\gamma} \left[\overset{+}{b}_{\tau}^{\epsilon} - \delta_{\tau}^{\epsilon} 2 \overset{+}{H} \right] \kappa_{\epsilon\gamma}, \quad \overset{*}{s}_{(2)}^{\rho\lambda} = DG^{\rho\lambda\epsilon\gamma} \frac{h^2}{12} \overset{+}{K} \gamma_{\epsilon\gamma} \\ \text{und } D &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad B = \frac{Eh^3}{12[1-\nu^2]}, \quad G^{\rho\lambda\epsilon\gamma} = \frac{1-\nu}{2} \left[\overset{+}{a}^{\rho\epsilon} \overset{+}{a}^{\lambda\gamma} + \overset{+}{a}^{\rho\gamma} \overset{+}{a}^{\lambda\epsilon} \right] + \nu \overset{+}{a}^{\rho\lambda} \overset{+}{a}^{\epsilon\gamma}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Die in runden Klammern angeschriebene Zahl gibt hier die *Ordnung* an, mit der die Krümmung $\overset{+}{b}_{\lambda}^{\rho}$ in den jeweiligen Teilschnittgrößen¹⁰ enthalten ist. So bezeichnet z.B. die *Teilschnittgröße* $\overset{*}{s}_{(1)}^{\alpha\beta}$ diejenigen Anteile in $\overset{*}{s}^{\alpha\beta}$, die die Krümmung $\overset{+}{b}_{\lambda}^{\rho}$ linear enthalten. Wie man in (3.31) erkennt, sind Terme von höherer als quadratischer Ordnung in $\overset{*}{s}^{\alpha\beta}$ nicht enthalten.

Denkt man sich auch für die Schnittgrößen $\overset{*}{n}^{\alpha\beta}$ und $\overset{*}{m}^{\alpha\beta}$ eine Entwicklung nach Krümmungsanteilen¹¹, so müssen, um die Gültigkeit von¹²

$$\overset{*}{s}^{\rho\lambda} = \overset{*}{n}^{\rho\lambda} - \overset{+}{b}_{\alpha}^{\rho} \overset{*}{m}^{\alpha\lambda} \quad (3.32)$$

gewährleisten zu können, die unterschiedlichen *Möglichkeiten der Approximation* aus

¹⁰Die in den *Teilschnittgrößen* $\overset{*}{s}_{(1)}^{\alpha\beta}$ und $\overset{*}{s}_{(2)}^{\alpha\beta}$ enthaltenen Krümmungsgrößen $\overset{+}{H}$ und $\overset{+}{K}$ werden die *mittlere* und die *Gaußsche Krümmung* genannt; sie sind in Anhang B formelmäßig angegeben, siehe (B.12).

¹¹Wie in [12] gezeigt wird, enthalten die Schnittgrößen $\overset{*}{n}^{\alpha\beta}$ und $\overset{*}{m}^{\alpha\beta}$ im Gegensatz zu $\overset{*}{s}^{\alpha\beta}$ auch höherwertige als quadratische Krümmungsanteile.

¹²Die Erfüllung von (3.25) wird im Folgenden für temperatur- und verformungsbedingte Schnittgrößenanteile getrennt gefordert, siehe auch (3.44). Mit Blick auf die *additive Aufspaltung* in (3.29) ist dies sinnvoll.

dem folgenden Schema bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\overset{*}{n}^{\rho\lambda} &= \overset{*}{n}_{(0)}^{\rho\lambda} + \overset{*}{n}_{(1)}^{\rho\lambda} + \overset{*}{n}_{(2)}^{\rho\lambda} + \dots + \overset{*}{n}_{(k-1)}^{\rho\lambda} + \dots \\
\overset{*}{m}^{\rho\lambda} &= 0 + \overset{*}{m}_{(0)}^{\rho\lambda} + \overset{*}{m}_{(1)}^{\rho\lambda} + \dots + \overset{*}{m}_{(k-2)}^{\rho\lambda} + \dots \\
\overset{*}{s}^{\rho\lambda} &= \overset{*}{s}_{(0)}^{\rho\lambda} + \overset{*}{s}_{(1)}^{\rho\lambda} + \overset{*}{s}_{(2)}^{\rho\lambda}
\end{aligned}
\tag{3.33}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
1.Approximation

 $\underbrace{\hspace{10em}}$
2.Approximation

 $\underbrace{\hspace{10em}}$
k.Approximation

Im Rahmen konkreter Berechnungen bedeutet dann jede zusätzlich berücksichtigte Approximationsstufe in den konstitutiven Gleichungen eine Genauigkeitssteigerung. Je nachdem wie stark gekrümmt das jeweilige Schalentragswerk ist, wird der Einfluss solcher Genauigkeitssteigerungen mehr oder weniger bedeutend sein.

Mit der 1.Approximation wird ein reiner *Membranspannungszustand* beschrieben, bei dem die Momente $\overset{*}{m}^{\alpha\beta}$ verschwinden und die Membrankomponenten $\overset{*}{n}^{\alpha\beta}$ - wie sich leicht nachweisen lässt - symmetrisch sein müssen:

$$\overset{*}{n}^{\rho\lambda} = \overset{*}{n}_{(0)}^{\rho\lambda} = \overset{*}{s}_{(0)}^{\rho\lambda} = DG^{\rho\lambda\epsilon\gamma}\gamma_{\epsilon\gamma} \quad (\mathbf{1.Approximation}) . \tag{3.34}$$

Die konstitutiven Gleichungen für die verformungsbedingten Schnittgrößen $\overset{*}{n}^{\rho\lambda}$ und $\overset{*}{m}^{\rho\lambda}$ im Rahmen der 2. und 3.Approximation ergeben sich gemäß [12] zu

$$\overset{*}{n}^{\rho\lambda} = \underbrace{DG^{\rho\lambda\epsilon\gamma}\gamma_{\epsilon\gamma}}_{\overset{*}{n}_{(0)}^{\rho\lambda}} + \underbrace{B \left(\overset{+}{b}_{\pi}^{\rho} G^{\pi\lambda\epsilon\gamma} + \overset{+}{b}_{\delta}^{\epsilon} G^{\rho\lambda\delta\gamma} - \overset{+}{b}_{\tau}^{\tau} G^{\rho\lambda\epsilon\gamma} \right) \kappa_{\epsilon\gamma}}_{\overset{*}{n}_{(1)}^{\rho\lambda}}
\tag{3.35}$$

$$\overset{*}{m}^{\rho\lambda} = \underbrace{BG^{\rho\lambda\epsilon\gamma}\kappa_{\epsilon\gamma}}_{\overset{*}{m}_{(0)}^{\rho\lambda}} \quad (\mathbf{2.Approximation})$$

und

$$\overset{*}{n}^{\rho\lambda} = \underbrace{DG^{\rho\lambda\epsilon\gamma}\gamma_{\epsilon\gamma}}_{\overset{*}{n}_{(0)}^{\rho\lambda}} + \underbrace{B \left(\overset{+}{b}_{\epsilon}^{\rho} G^{\pi\lambda\epsilon\gamma} + \overset{+}{b}_{\delta}^{\epsilon} G^{\rho\lambda\delta\gamma} - \overset{+}{b}_{\tau}^{\tau} G^{\rho\lambda\epsilon\gamma} \right) \kappa_{\epsilon\gamma}}_{\overset{*}{n}_{(1)}^{\rho\lambda}} + \underbrace{0}_{\overset{*}{n}_{(2)}^{\rho\lambda}}
\tag{3.36}$$

$$\overset{*}{m}^{\rho\lambda} = \underbrace{BG^{\rho\lambda\epsilon\gamma}\kappa_{\epsilon\gamma}}_{\overset{*}{m}_{(0)}^{\rho\lambda}} + \underbrace{B \left(\overset{+}{b}_{\pi}^{\rho} G^{\pi\lambda\epsilon\gamma} - \overset{+}{b}_{\tau}^{\tau} G^{\rho\lambda\epsilon\gamma} \right) \gamma_{\epsilon\gamma}}_{\overset{*}{m}_{(1)}^{\rho\lambda}} \quad (\mathbf{3.Approximation}) .$$

Entscheidet man sich also im Rahmen konkreter numerischer Berechnungen für eine der drei Approximationen für $\dot{n}^{\rho\lambda}$ bzw. $\dot{m}^{\rho\lambda}$, so ergibt sich in jedem Falle mit (3.32) die entsprechende Approximation für die Schnittgröße $\dot{s}^{\rho\lambda}$ gemäß (3.31). Jede der drei angegebenen Approximationen garantiert somit die Symmetrie der Schnittgröße $\dot{s}^{\rho\lambda}$, womit bei isothermen Zustandsänderungen ($T = T_0 \Rightarrow \dot{s}^{\rho\lambda} = \dot{s}^{\rho\lambda}$) das Gleichgewicht um die Schalennormale erfüllt wird.

Die obigen konstitutiven Gleichungen sind, wie gefordert wurde, *linear in den konstitutiven Variablen* $\gamma_{\rho\lambda}$ und $\kappa_{\alpha\lambda}$. Nichtlinearitäten ergeben sich, wenn man diese Variablen in Abhängigkeit von *Deformationskoeffizienten* Φ_i^k , bzw. den darin enthaltenen Verschiebungskomponenten v^k - siehe (B.21) - auswertet. Gemäß [12] lauten die im Rahmen einer *geometrisch nichtlinearen Theorie* formulierten Beziehungen für die *mechanischen konstitutiven Variablen der Schalentheorie*, die ausgehend von (3.22) herleitbar sind, folgendermaßen:

$$\gamma_{\rho\lambda} = \frac{1}{2} \left(\Phi_\lambda^\pi \overset{+}{a}_{\rho\pi} + \Phi_\rho^\pi \overset{+}{a}_{\lambda\pi} + \Phi_\lambda^s \Phi_\rho^k \overset{+}{a}_{sk} \right) \quad (3.37)$$

für die *Verzerrungen* und

$$\kappa_{\alpha\lambda} = \kappa_\alpha^\rho \overset{+}{a}_{\rho\lambda} = \left[\Phi_3^\rho|_\alpha + \overset{+}{b}_\alpha^\pi \left(\Phi_\pi^\rho - \Phi_\pi^\rho \Phi_\gamma^\gamma \right) - \Phi_3^\pi|_\alpha \Phi_\pi^\rho - \frac{1}{2} \overset{+}{b}_\alpha^\rho \left(\Phi_\gamma^\pi \Phi_\pi^\gamma - \Phi_\pi^\pi \Phi_\gamma^\gamma \right) \right] \overset{+}{a}_{\rho\lambda} \quad (3.38)$$

für die *verformungsbedingten Krümmungsänderungen der Mittelfläche*. Hierbei wurden neben linearen, auch quadratisch-nichtlineare Verformungsanteile vollständig berücksichtigt.

3.3.2 Temperaturbedingte Anteile

Treten beim Übergang vom Ausgangs- in den Momentanzustand Temperaturänderungen auf ($T \neq T_0$), so müssen in (3.29) neben den verformungsbedingten auch noch die temperaturbedingten Anteile berücksichtigt werden. Diese bestimmt man, indem man das Stoffgesetz für die temperaturbedingten Spannungen (3.28)₃ in die entsprechenden Schnittgrößenanteile in (3.30) einsetzt. Somit erhält man z.B.

$$\overset{T}{s}^{\rho\lambda} = -\gamma^* \int_{-h/2}^{h/2} (T - T_0) \overset{+}{g}^{\alpha\beta} \overset{+}{\mu}_\alpha^\rho \overset{+}{\mu}_\beta^\lambda \overset{+}{\mu} d\theta^3. \quad (3.39)$$

Im Sinne der im vorangegangenen Abschnitt dargestellten Vorgehensweise wollen wir nun in einem ersten Schritt eine in den berücksichtigten Krümmungsanteilen vollständige Formulierung für den temperaturbedingten Anteil der Schnittgröße $\overset{T}{s}^{\rho\lambda}$ herleiten. Anschließend soll auch hier wieder ein Schema für die Approximation der (temperaturbedingten) Schnittgrößen nach Krümmungsanteilen angegeben werden, das neben der Energiekonsistenz die *Symmetrie der Schnittgröße* $\overset{T}{s}^{\rho\lambda}$ garantiert.

Drückt man unter Verwendung der Kehrmatrix des Shifters, siehe (B.3) den Metrik-tensor des Schalenraumes $\overset{+}{g}^{\alpha\beta}$ durch den der Mittelfläche $\overset{+}{a}^{\rho\lambda}$ aus, so erhält man mit

(B.11)₂ - ausgehend von (3.39):

$$s^{\rho\lambda} = -\gamma^* \int_{-h/2}^{h/2} (T - T_0) \overset{+}{\mu} d\theta^3 \overset{+}{a}{}^{\rho\lambda} \quad \text{mit} \quad \overset{+}{\mu} = 1 - 2\theta^3 \overset{+}{H} + (\theta^3)^2 \overset{+}{K} . \quad (3.40)$$

Unter Einführung der drei *thermischen konstitutiven Variablen*¹³

$$\begin{aligned} \Delta \overset{0}{T} &= \int_{-h/2}^{h/2} (T - T_0) d\theta^3, \quad \Delta \overset{1}{T} = \int_{-h/2}^{h/2} (T - T_0) \theta^3 d\theta^3, \quad \Delta \overset{2}{T} = \int_{-h/2}^{h/2} (T - T_0) (\theta^3)^2 d\theta^3 \\ \text{oder allgemein: } \Delta \overset{n}{T} &= \int_{-h/2}^{h/2} (T - T_0) (\theta^3)^n d\theta^3 \quad (n = 0, 1, 2), \end{aligned} \quad (3.41)$$

kann dann der *temperaturbedingte Anteil der symmetrischen Schnittgröße* $s^{\rho\lambda}$ ohne Vernachlässigung von Krümmungstermen folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} s^{\rho\lambda} &= s_{(0)}^{\rho\lambda} + s_{(1)}^{\rho\lambda} + s_{(2)}^{\rho\lambda} \\ \text{mit } s_{(0)}^{\rho\lambda} &= -\gamma^* \Delta \overset{0}{T} \overset{+}{a}{}^{\rho\lambda}, \quad s_{(1)}^{\rho\lambda} = \gamma^* 2 \overset{+}{H} \Delta \overset{1}{T} \overset{+}{a}{}^{\rho\lambda} \quad \text{und} \quad s_{(2)}^{\rho\lambda} = -\gamma^* \overset{+}{K} \Delta \overset{2}{T} \overset{+}{a}{}^{\rho\lambda}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Man erkennt in (3.42), dass die Ordnung der jeweiligen Approximationsstufen mit der Ordnung der darin enthaltenen konstitutiven Variablen übereinstimmt. Allgemein gilt deshalb:

$$s_{(n)}^{\rho\lambda} = s_{(n)}^{\rho\lambda} \left(\Delta \overset{n}{T} \right) \quad \text{für } n = 0, 1, 2 . \quad (3.43)$$

Die Auswertung der übrigen in (3.30) enthaltenen temperaturbedingten Schnittgrößen liefert dann in Verbindung mit der Forderung nach Gültigkeit von

$$s^{\rho\lambda} = n^{\rho\lambda} - b_{\alpha}^{\rho} m^{\alpha\lambda} \quad (3.44)$$

das folgende allgemeine Schema für die Approximation der Schnittgrößen nach

¹³Ändern sich die Temperaturfelder nur langsam (quasistatisch), so kann bei dünnwandigen Flächentragwerken der Temperaturverlauf in θ^3 -Richtung üblicherweise mit einem *linearen Ansatz* beschrieben werden: $T(\theta^3) = T_0 + \frac{1}{2}(T_{(o)} + T_{(u)}) + \frac{\theta^3}{h}(T_{(o)} - T_{(u)})$. $T_{(o)}$ und $T_{(u)}$ bezeichnen die Temperaturerhöhungen an der oberen und der unteren Laibungsfläche. Die Integrationen in (3.41) können dann ausgeführt werden: $\Delta \overset{0}{T} = \frac{1}{2}h(T_{(o)} + T_{(u)})$; $\Delta \overset{1}{T} = \frac{1}{12}h^2(T_{(o)} - T_{(u)})$; $\Delta \overset{2}{T} = \frac{1}{24}h^3(T_{(o)} + T_{(u)})$.

Krümmungsanteilen:

$$\begin{aligned}
\overset{T}{n}^{\rho\lambda} &= \overset{T}{n}_{(0)}^{\rho\lambda} + \overset{T}{n}_{(1)}^{\rho\lambda} + 0 \\
\overset{T}{m}^{\rho\lambda} &= 0 + \overset{T}{m}_{(0)}^{\rho\lambda} + \overset{T}{m}_{(1)}^{\rho\lambda} \\
\overset{T}{s}^{\rho\lambda} &= \overset{T}{s}_{(0)}^{\rho\lambda} + \overset{T}{s}_{(1)}^{\rho\lambda} + \overset{T}{s}_{(2)}^{\rho\lambda}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 1.Approximation

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 2.Approximation

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 3.Approximation (exakt)

Mit Blick auf (3.45) sei bemerkt, dass - wie sich zeigen lässt - die Schnittgrößen $\overset{T}{n}^{\rho\lambda}$ und $\overset{T}{m}^{\rho\lambda}$ keine Krümmungsanteile von quadratischer oder höherwertiger Ordnung enthalten. Deshalb bezeichnen hier die konstitutiven Gleichungen der 3.Approximation keine Näherung, sondern *exakte Beziehungen* im Rahmen einer in den konstitutiven Variablen linearen Theorie.

Die konstitutive Gleichung der 1.Approximation repräsentiert auch hier wieder einen reinen *Membranspannungszustand*. Es gilt:

$$\overset{T}{n}^{\rho\lambda} = \overset{T}{n}_{(0)}^{\rho\lambda} = \overset{T}{s}_{(0)}^{\rho\lambda} = -\gamma^* \Delta \overset{0}{T} \overset{+}{a}^{\rho\lambda} \quad \textbf{(1.Approximation)} . \tag{3.46}$$

Nach Auswertung von (3.30)₄ und (3.30)₆ kann man unter Zuhilfenahme des Approximationsschemas in (3.45) die konstitutiven Gleichungen der 2. und 3. Approximation ableiten. Unter Einführung der in den Krümmungsanteilen linearen Größe

$$\overset{+}{c}^{\rho\lambda} = \overset{+}{a}^{\epsilon\lambda} \left(2 \overset{+}{H} \delta_\epsilon^\rho - \overset{+}{b}_\epsilon^\rho \right) \tag{3.47}$$

lauten diese:

$$\overset{T}{n}^{\rho\lambda} = \underbrace{-\gamma^* \Delta \overset{0}{T} \overset{+}{a}^{\rho\lambda}}_{\overset{T}{n}_{(0)}^{\rho\lambda}} + \underbrace{\gamma^* \Delta \overset{1}{T} \overset{+}{c}^{\rho\lambda}}_{\overset{T}{n}_{(1)}^{\rho\lambda}}, \quad \overset{T}{m}^{\rho\lambda} = \underbrace{-\gamma^* \Delta \overset{1}{T} \overset{+}{a}^{\rho\lambda}}_{\overset{T}{m}_{(0)}^{\rho\lambda}} \quad \textbf{(2.Approximation)} \tag{3.48}$$

und

$$\overset{T}{n}^{\rho\lambda} = \underbrace{-\gamma^* \Delta \overset{0}{T} \overset{+}{a}^{\rho\lambda}}_{\overset{T}{n}_{(0)}^{\rho\lambda}} + \underbrace{\gamma^* \Delta \overset{1}{T} \overset{+}{c}^{\rho\lambda}}_{\overset{T}{n}_{(1)}^{\rho\lambda}} + \underbrace{0}_{\overset{T}{n}_{(2)}^{\rho\lambda}}, \quad \overset{T}{m}^{\rho\lambda} = \underbrace{-\gamma^* \Delta \overset{1}{T} \overset{+}{a}^{\rho\lambda}}_{\overset{T}{m}_{(0)}^{\rho\lambda}} + \underbrace{\gamma^* \Delta \overset{2}{T} \overset{+}{c}^{\rho\lambda}}_{\overset{T}{m}_{(1)}^{\rho\lambda}} \tag{3.49}$$

(3.Approximation - exakt) .

Wie bei den verformungsbedingten Schnittgrößen, so führt auch hier wieder jede der drei möglichen Approximationen für $\overset{T}{n}^{\rho\lambda}$ bzw. $\overset{T}{m}^{\rho\lambda}$ auf eine *symmetrische* Schnittgröße $\overset{T}{s}^{\rho\lambda}$. Die in (3.24) geforderte Symmetrie der thermoelastischen Gesamt-Schnittgröße $s^{\rho\lambda}$ ist also erfüllt:

$$\text{Wegen } \overset{T}{s}^{\rho\lambda} = \overset{T}{s}^{\lambda\rho} \quad \text{und} \quad \overset{*}{s}^{\rho\lambda} = \overset{*}{s}^{\lambda\rho} \quad \text{gilt} \quad s^{\rho\lambda} = s^{\lambda\rho}. \quad (3.50)$$

Eine konsequente Anwendung der Approximationsschemata (3.33) und (3.45) führt also letztendlich auf einen Satz von konstitutiven Gleichungen für thermoelastisches Materialverhalten, mit denen das *Gleichgewicht um die Schalennormale* (B.18) erfüllt wird.

In den obigen konstitutiven Gleichungen erkennt man - was im Hinblick auf (3.42), bzw. (3.43) zu erwarten war - , dass sich die Zahl der benötigten thermischen Variablen mit jeder Steigerung der Genauigkeit um 1 erhöht, siehe Tabelle 3.1.

Approximation	benötigte thermische Variablen
1. (Membranspannungszustand)	$\Delta \overset{0}{T}$
2.	$\Delta \overset{0}{T}, \Delta \overset{1}{T}$
3. (exakt)	$\Delta \overset{0}{T}, \Delta \overset{1}{T}, \Delta \overset{2}{T}$

Tabelle 3.1: thermische Variablen in den konstitutiven Gleichungen

3.3.3 Nachweis der Energiekonsistenz

Ohne Berücksichtigung temperaturabhängiger Anteile in den Schnittgrößen wird in [12] und [5] gezeigt, wie sich die Energiekonsistenz der konstitutiven Gleichungen nachweisen lässt. *Energiekonsistenz* bedeutet dann, dass sich die Schnittgrößen $\overset{*}{s}^{\rho\lambda}$ und $\overset{*}{m}^{\rho\lambda}$ aus ein- und derselben Potenzialfunktion ableiten lassen müssen. In [5] wird in diesem Zusammenhang von einem 'elastischen Potenzial' gesprochen. Gemäß den Ausführungen in [12] ist dieses Potenzial die *mechanische Formänderungsenergie*¹⁴, die sich in Abhängigkeit der *konstitutiven mechanische Variablen* $\gamma_{\alpha\beta}$ und $\kappa_{\alpha\beta}$ ausdrücken lässt. Ein Nachweis der Energiekonsistenz - ausgehend von der mechanischen Formänderungsenergie - ist im Rahmen einer thermoelastischen Theorie aber nicht mehr möglich, da hier auch *konstitutive thermische Variablen* $\Delta \overset{n}{T}$ in die Schnittgrößen eingehen. Ausgehend von der freien Energie f und den Zustandsgleichungen in (2.55) soll hier der Versuch unternommen werden, die Energiekonsistenz für die konstitutiven Gleichungen der thermoelastischen Schalentheorie nachzuweisen.

¹⁴Diese ergibt sich, wenn man in der freien Energie die Temperatur konstant setzt; dann verbleibt in (2.56)₁ lediglich der erste Term.

In Abschnitt 2.2.1 wird für die freie Energie eines Volumenelementes eine thermoelastische Potenzialfunktion formuliert, die als Zustandsvariablen die elastischen Verzerrungen und die Temperatur enthält. Hieraus lassen sich - ausgehend von der Gibbschen Fundamentalgleichung - Zustandsgleichungen für die Spannungen und die Entropie ableiten. Die grundlegenden Beziehungen seien hier nochmals dargestellt, wobei wir im Rahmen einer thermoelastischen Theorie $\Gamma_{ik}^{RE} = \Gamma_{ik}$ setzen:

$${}^+ \rho f = {}^+ \hat{\rho} \hat{f}(\Gamma_{ik}, T) ; \quad \tau^{ik} = {}^+ \hat{\rho} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \Gamma_{ik}} ; \quad s = - \frac{\partial \hat{f}}{\partial T} . \quad (3.51)$$

Diese Beziehungen wurden durch thermodynamische Überlegungen an einem - aus einem 3-dimensionalen Kontinuum herausgeschnittenen - Volumenelement abgeleitet. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass für die auf die 2-dimensionale Schalenmittelfläche bezogenen Schnitt- und Entropiegrößen (werden hier noch eingeführt) ganz ähnliche Beziehungen wie in (3.51) gelten. So werden wir im Hinblick auf die *Energiekonsistenz* nachweisen, dass die beiden Schnittgrößen $s^{\rho\lambda}$ und $m^{\rho\lambda}$ aus einer Potenzialfunktion π ableitbar sein müssen.

In einem ersten Schritt wird - im Rahmen einer *globalen Formulierung* - die *zeitliche Änderung der freien Energie im gesamten Schalenkontinuum* angeschrieben. Diese ergibt sich unter Beachtung der Massenerhaltung ($dm = d\dot{m}$) durch Integration folgendermaßen:

$$\dot{\bar{F}}_G = \int_{\bar{V}} {}^+ \hat{\rho} \dot{\hat{f}}(\Gamma_{ik}, T) d\bar{V} \quad (\text{es gilt: } F = f dm = {}^+ \hat{\rho} f d\bar{V}) . \quad (3.52)$$

Da f eine Zustandsgröße ist, gilt mit (1.2) und (3.51):

$$\dot{\bar{F}}_G = \int_{(\bar{V})} \left[\frac{\partial f}{\partial \Gamma_{ik}} \dot{\Gamma}_{ik} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} \right] {}^+ \hat{\rho} d\bar{V} = \overbrace{\int_{(\bar{V})} \tau^{ik} \dot{\Gamma}_{ik} d\bar{V}}^{=\dot{\mathcal{W}}_G} - \int_{(\bar{V})} s \dot{T} {}^+ \hat{\rho} d\bar{V} . \quad (3.53)$$

Der Vergleich mit (3.18) zeigt, dass der überklammerte Ausdruck in (3.53) genau die Größe $\dot{\mathcal{W}}_G$ - die *Formänderungsleistung im gesamten Schalenkontinuum* - bezeichnet. Wie in Abschnitt 3.3 gezeigt wird¹⁵, gelingt eine *Transformation auf die Mittelfläche*, sodass eine Darstellung in Abhängigkeit von Schnittgrößen und konstitutiven Variablen der Schalentheorie möglich wird, siehe (3.21). Durch Einsetzen in (3.53) erhält man mit $\kappa_\alpha^\rho \dot{a}_{\rho\lambda} = \kappa_{\alpha\lambda}$ und im Rahmen einer in den konstitutiven Variablen linearen Theorie:

$$\dot{\bar{F}}_G = \int_{(\bar{A})} \left[s^{\rho\lambda} \dot{\gamma}_{\rho\lambda} + m^{\rho\lambda} \dot{\kappa}_{\rho\alpha} \right] d\bar{A} - \int_{(\bar{V})} s \dot{T} {}^+ \hat{\rho} d\bar{V} . \quad (3.54)$$

Um auch den zweiten Integralausdruck in (3.54) auf die Schalenmittelfläche beziehen zu können, wollen wir für die Entropie im Schalenraum den folgenden *Potenzreihenansatz*

¹⁵ Ausführlicher in [12].

in θ^3 machen:

$$s(\theta^k, t) = \overset{0}{s}(\theta^\alpha, t) + \theta^3 \overset{1}{s}(\theta^\alpha, t) + (\theta^3)^2 \overset{2}{s}(\theta^\alpha, t) + \dots \quad (3.55)$$

Die Größen $\overset{n}{s}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) sind dann deutbar als *Entropiegrößen der Mittelfläche*. Somit erhält man für den *thermischen Anteil* in \dot{F}_G :

$$- \int_{(\dot{V})} s \dot{T} \overset{+}{\rho} d\dot{V} = - \int_{(\dot{A})} \left[\int_{-h/2}^{+h/2} \left(\overset{0}{s} + \theta^3 \overset{1}{s} + (\theta^3)^2 \overset{2}{s} + \dots \right) (T - T_0) \overset{+}{\rho} \mu d\theta^3 \right] d\dot{A}. \quad (3.56)$$

Für eine in Dickenrichtung konstante Dichte $\overset{+}{\rho}$ kann man mit $(B.11)_2$ die Gleichung (3.56) so umformen, dass Integralausdrücke entstehen, die genau den zeitlichen Änderungen der oben eingeführten *thermischen Variablen* (3.41) entsprechen. Somit ergibt sich:

$$- \int_{(\dot{V})} s \dot{T} \overset{+}{\rho} d\dot{V} = - \int_{(\dot{A})} \overset{+}{\rho} \left[\overset{0}{s} \overset{\bullet}{\Delta T} + \left(\overset{1}{s} - 2 \overset{+}{H} \overset{0}{s} \right) \overset{\bullet}{\Delta T} + \left(\overset{2}{s} - 2 \overset{+}{H} \overset{1}{s} + \overset{+}{K} \overset{0}{s} \right) \overset{\bullet}{\Delta T} + \dots \right] d\dot{A}. \quad (3.57)$$

Im Rahmen einer Näherung werden konstitutive thermische Variablen von höherer Ordnung als $\overset{2}{\Delta T}$ - also Terme, die sich gemäß $(3.41)_4$ für $n = 3, 4$ usw. ergeben würden - hier nicht weiter berücksichtigt. Eine solche Vorgehensweise ist mit Blick auf Tabelle 3.1 naheliegend. Diese Näherung führt mit Blick auf (3.57) dazu, dass die Entropiegrößen $\overset{0}{s}$, $\overset{1}{s}$ und $\overset{2}{s}$ im Folgenden für eine Formulierung der zeitlichen Änderung der freien Energie ausreichen.

Durch Einsetzen von (3.57) in (3.54) ergibt sich schließlich eine (vollständig) auf die Mittelfläche \dot{A} bezogene Formulierung:

$$\dot{F}_G = \int_{(\dot{A})} \left\{ s^{\rho\lambda} \overset{\bullet}{\gamma}_{\rho\lambda} + m^{\rho\lambda} \overset{\bullet}{\kappa}_{\rho\lambda} - \overset{+}{\rho} \left[\overset{0}{s} \overset{\bullet}{\Delta T} + \left(\overset{1}{s} - 2 \overset{+}{H} \overset{0}{s} \right) \overset{\bullet}{\Delta T} + \left(\overset{2}{s} - 2 \overset{+}{H} \overset{1}{s} + \overset{+}{K} \overset{0}{s} \right) \overset{\bullet}{\Delta T} \right] \right\} d\dot{A} \quad (3.58)$$

Es ist nun naheliegend, den Integranden in (3.58) als ein *vollständiges Differenzial* zu deuten, siehe (1.2). Das heißt, es existiert eine auf die Mittelfläche bezogene Potenzialfunktion π für die freie Energie, die genau von denjenigen Größen (Zustandsvariablen) abhängt, deren Zeitableitungen in (3.58) vertreten sind:

$$\pi = \hat{\pi} \left(\gamma_{\rho\lambda}, \kappa_{\rho\lambda}, \overset{0}{\Delta T}, \overset{1}{\Delta T}, \overset{2}{\Delta T} \right). \quad (3.59)$$

Wie eigentlich nicht anders zu erwarten war, sind hierin als *Zustandsvariablen* genau die *konstitutiven Variablen der Mittelfläche* enthalten.

Ersetzt man nun in (3.52) die 'dreidimensionale' Potenzialfunktion f durch die 'zwei-

dimensionale' Potenzialfunktion π , so folgt mit $\overset{+}{m} = \overset{+}{\rho} \int_{-h/2}^{+h/2} \overset{+}{\mu} d\theta^3$:

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{F}_G &= \int_{(\overset{+}{V})} \overset{\bullet}{\pi} \overset{+}{\rho} d\overset{+}{V} = \int_{(\overset{+}{A})} \overset{\bullet}{\pi} \overset{+}{m} d\overset{+}{A} = \\ &= \int_{(\overset{+}{A})} \left[\frac{\partial \pi}{\partial \gamma_{\rho\lambda}} \overset{\bullet}{\gamma}_{\rho\lambda} + \frac{\partial \pi}{\partial \kappa_{\rho\lambda}} \overset{\bullet}{\kappa}_{\rho\lambda} + \frac{\partial \pi}{\partial \Delta T} \overset{\bullet}{\Delta T}^0 + \frac{\partial \pi}{\partial \Delta T} \overset{\bullet}{\Delta T}^1 + \frac{\partial \pi}{\partial \Delta T} \overset{\bullet}{\Delta T}^2 \right] \overset{+}{m} d\overset{+}{A}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Vergleicht man (3.60) mit (3.58), so folgert man, dass sich die Stoffgesetze für die Schnitt- und Entropiegrößen der Mittelfläche aus einer Potenzialfunktion (*der auf die Mittelfläche bezogenen freien Energie* π) ableiten lassen:

$$\begin{aligned} s^{\rho\lambda} &= m \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \gamma_{\rho\lambda}} ; \quad m^{\rho\lambda} = m \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \kappa_{\rho\lambda}} ; \\ \overset{+}{\rho} s^0 &= m \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \Delta T}^0 ; \quad \overset{+}{\rho} \left(\overset{1}{s} - \overset{0}{s} 2 \overset{+}{H} \right) = m \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \Delta T}^1 ; \quad \overset{+}{\rho} \left(\overset{2}{s} - \overset{1}{s} 2 \overset{+}{H} + \overset{0}{s} \overset{+}{K} \right) = m \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \Delta T}^2. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Im Hinblick auf die thermoelastischen Schnittgrößen $s^{\rho\lambda}$ und $m^{\rho\lambda}$ bedeutet dies, dass sie aus ein- und derselben Potenzialfunktion π ableitbar sein müssen. In Zusammenhang mit konstitutiven Gleichungen für die Schnittgrößen, die diese Bedingung erfüllen, spricht man gemäß [12] von einer **energiekonsistenten Formulierung**.

Wie sich zeigen lässt, erfüllen die in den vorangegangenen Kapiteln aufgestellten konstitutiven Gleichungen für jede der drei wählbaren Approximationen die Forderung nach Energiekonsistenz.

Im Rahmen der dritten Approximationen müssten in π - mit Blick auf Tabelle 3.1 - alle drei thermischen Variablen enthalten sein. Der folgende allgemeine Produktansatz für $\hat{\pi}$ wäre dann denkbar:

$$\begin{aligned} \pi &= A^{\alpha\beta\rho\lambda} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\rho\lambda} + B^{\alpha\beta\rho\lambda} \gamma_{\alpha\beta} \kappa_{\rho\lambda} + C^{\alpha\beta\rho\lambda} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\rho\lambda} \\ &+ D^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} \Delta T^0 + E^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} \Delta T^1 + F^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} \Delta T^2 + G^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} \Delta T^1 + H^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} \Delta T^2 \\ &+ \text{rein-thermische Anteile}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Die *Teilelastizitätstensoren* $A^{\alpha\beta\rho\lambda}, \dots, H^{\alpha\beta}$ in (3.62) können im Hinblick auf die konstitutiven Gleichungen der dritten Approximationsstufe bestimmt werden¹⁶. Über die *rein-thermischen Anteile* (in $\Delta T^0, \Delta T^1$ und ΔT^2) wird hier keine Aussage gemacht; sie haben maßgeblichen Einfluss auf die *Entropiegrößen der Mittelfläche*, die wir im Folgenden nicht mehr benötigen, da die Wärmeleitgleichung weiterhin im (dreidimensionalen) Schalenkontinuum formuliert werden soll.

¹⁶Das heißt, die *Teilelastizitätstensoren* in (3.62) müssen so gewählt werden, dass sich (3.42) und (3.49)₂ aus (3.61)_{1/2} ableiten lassen.

3.4 Die Anwendung der gekoppelten Wärmeleitgleichung auf Schalentragerwerke

Ausgangspunkt der Betrachtung bildet hier die *gekoppelte Wärmeleitgleichung*. In Abschnitt 2.2.3 wird gezeigt, wie sie sich ergibt, wenn man ausgehend von einer konkreten Formulierung für die freie Energie (2.56) die Zustandsgleichungen (2.55) in den 1.Hauptsatz einsetzt. Die *Differenzialgleichung der Wärmeleitung* repräsentiert somit das *Prinzip der Energieerhaltung*.

Im Rahmen einer *thermoelastischen Schalentheorie* streichen wir in (2.91) den plastischen Kopplungsterm, dann verbleibt¹⁷:

$$\overset{+}{\rho}c\dot{T} + h^k|_k + \underbrace{\gamma T \overset{+}{g}^{ik} \dot{\Gamma}_{ik}}_{\text{Kopplungsterm}} = \overset{+}{\rho}h. \quad (3.63)$$

Für die Anwendung von (3.63) auf Schalentragerwerke ist es sinnvoll die im Kopplungsterm vertretenen Verzerrungen Γ_{ik} im Schalenraum durch die in Abschnitt 3.3 eingeführten (mechanischen) konstitutiven Variablen der Mittelfläche zu ersetzen. Da wegen der Normalenhypothese Schubverzerrungen verschwinden und mit $\tau^{33} = 0$ die Querverzerrungen feststehen, siehe (3.19), benötigen wir hier noch eine Beziehung für $\Gamma_{\alpha\beta}$. Gemäß [12] lässt sich basierend auf der Normalenhypothese zeigen, dass gilt:

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \overset{+}{\mu}_\alpha^\rho \overset{+}{\mu}_\beta^\lambda \gamma_{\rho\lambda} + \frac{1}{2}\theta^3 \left(\overset{+}{\mu}_\alpha^\rho \kappa_\beta^\lambda + \overset{+}{\mu}_\beta^\lambda \kappa_\alpha^\rho \right) \overset{+}{a}_{\rho\lambda} + \Delta\Gamma_{\alpha\beta}. \quad (3.64)$$

Im Rahmen einer in den konstitutiven Variablen der Schalentheorie linearen Formulierung werden die in $\Delta\Gamma_{\alpha\beta}$ zusammengefassten nichtlinearen Terme im Folgenden weggelassen¹⁸.

Somit gelingt mit $\overset{+}{a}^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_\beta^\beta$ und unter Beachtung von (B.3) die folgende *Transformation für den Kopplungsterm*:

$$\gamma T \overset{+}{g}^{ik} \dot{\Gamma}_{ik} = \gamma^* T \left(\gamma_\beta^\beta + \theta^3 \overset{+}{\kappa}_\rho^\lambda \overset{+}{\nu}_\lambda^\rho \right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \gamma \alpha_T \dot{T} T \quad \text{mit} \quad \gamma^* = \gamma \frac{1-2\nu}{1-\nu}. \quad (3.65)$$

Ordnet man nach Einsetzen von (3.65) in (3.63) die Terme mit \dot{T} , so entsteht:

$$\dot{T} \left(\overset{+}{\rho}c + \frac{1+\nu}{1-\nu} \gamma \alpha_T T \right). \quad (3.66)$$

Der Ausdruck in Klammern kann nun als eine *kopplungsbedingt-veränderte Wärmekapazität* gedeutet werden. Durch Einsetzen der Stoffkonstanten und einer konkreten Temperatur T kann man diese Veränderungen abschätzen: So ergibt sich für den Werkstoff *Stahl* bei $T = 300K$ beispielhaft:

$$\frac{\overset{+}{\rho}c + \frac{1+\nu}{1-\nu} \gamma \alpha_T T}{\overset{+}{\rho}c} \approx 1.01. \quad (3.67)$$

¹⁷In Zusammenhang mit dem 'Kopplungsterm' wird im Folgenden immer der *elastische Kopplungsterm* angesprochen.

¹⁸Diese finden sich in Anhang B, siehe (B.26).

Die Schlussfolgerung liegt nahe, dass solche kopplungsbedingten Veränderungen in der Wärmekapazität von untergeordneter Bedeutung sind, weshalb wir diese Effekte im Folgenden streichen werden. Somit ergibt sich für dünnwandige Flächentragwerke die *Wärmeleitgleichung mit dem transformierten Kopplungsterm*, die mit den entsprechenden Formulierungen in der Literatur¹⁹ vergleichbar wird:

$$\dot{T}^+ \rho c + h^k|_k + \underbrace{\gamma^* T \left(\dot{\gamma}_\beta^\beta + \theta^3 \dot{\kappa}_\rho^\lambda \dot{\nu}_\lambda^\rho \right)}_{\text{transf.Kopplungsterm}} = \dot{\rho} h. \quad (3.68)$$

Für die in (3.68) enthaltenen Wärmeströme h^k ($k = 1, 2, 3$) existieren Stoffgesetze, die sich - wie in Anhang E gezeigt wird -, aus dem Fourierschen Gesetz der Wärmeleitung entwickeln lassen. Bei Anwendung auf dünne Flächentragwerke können diese *Stoffgesetze für die Wärmeströme* (E.7) unter Beachtung der Normalenhypothese (es gilt: $\dot{g}^{\alpha 3} = 0$, $\dot{g}^{33} = 1$) auf die folgende Form gebracht werden:

$$h^\alpha = -\lambda \dot{g}^{\alpha\beta} T_{,\beta}; \quad h^3 = -\lambda T_{,3}. \quad (3.69)$$

Durch Einsetzen von (3.69) in (3.68) ergibt sich schließlich:

$$\dot{T}^+ \rho c - (\lambda \dot{g}^{km} T_{,m})|_k + \gamma^* T \left(\dot{\gamma}_\beta^\beta + \theta^3 \dot{\kappa}_\rho^\lambda \dot{\nu}_\lambda^\rho \right) = \dot{\rho} h. \quad (3.70)$$

Im Rahmen einer *thermoelastisch gekoppelten Analyse von Flächentragwerken* - mit der wir uns in den nachfolgenden Kapiteln intensiv beschäftigen wollen - sollen hier insbesondere die Auswirkungen des Kopplungsterms untersucht werden. Da über diesen Term Zeitableitungen der konstitutiven Variablen $\gamma_{\alpha\beta}$ und $\kappa_{\alpha\beta}$ Eingang in die Wärmeleitgleichung finden, kann diese nicht unabhängig von den Bewegungsgleichungen gelöst werden. Der Grund hierfür ist die Tatsache, dass in den Bewegungsgleichungen (3.16) die Schnittgrößen $n^{\rho\lambda}$ und $n^{\rho\lambda}$ enthalten sind, die linear von den konstitutiven Variablen abhängen. Unter Berücksichtigung der konstitutiven Beziehungen lässt sich so - wie im nachfolgenden Abschnitt formelmäßig dargestellt wird - ein kompliziertes Differenzialgleichungssystem (im Gebiet) formulieren, das die Kopplung von Temperatur- und Verformungsfeldern in der Schale eindrucksvoll demonstriert.

Bei einer *entkoppelten Analyse* wird der Kopplungsterm in der Wärmeleitgleichung - im Rahmen einer Näherung - gestrichen²⁰. In einem ersten Schritt kann dann die *entkoppelte Wärmeleitgleichung* unter Anpassung an die jeweiligen *thermischen Randbedingungen*²¹ vorab gelöst werden. Gelingt dies, sind also die sich im Schalenkontinuum einstellenden Temperaturfelder $T(\theta^k, t)$ bekannt, so können auch die *konstitutiven Variablen* $\Delta \overset{n}{T}$ durch Integration gemäß (3.41) berechnet werden. Diese sind als Feldgrößen der Mittelfläche darstellbar: $\Delta \overset{n}{T}(\theta^\alpha, t)$. In den konstitutiven Gleichungen treten sie als - im Allgemeinen zeitabhängige - *innere thermische Belastungen* auf, die in die

¹⁹Siehe z.B. [50], [26].

²⁰Bei der Untersuchung thermischer Beanspruchungen von Flächentragwerken sind in der Berechnungspraxis entkoppelte Analysen die Regel.

²¹Auf *Randbedingungen* wird im nachfolgenden Kapitel eingegangen, siehe Abschnitt 4.2 und 4.3.

Bewegungsgleichungen der Schale eingehen. In einem zweiten Schritt müssen dann die Bewegungsgleichungen der Schale - mit den Unbekannten $v^k(\theta^\alpha, t)$ und $n^{\alpha 3}(\theta^\alpha, t)$ - unter Anpassung an die jeweiligen *mechanischen Randbedingungen* gelöst werden.

Eine solche *sukzessive Lösung* des thermoelastischen Problems - durch Lösung der Wärmeleitgleichung und anschließender Lösung der Bewegungsgleichungen - ist verständlicher Weise nur im Rahmen einer entkoppelten Analyse möglich.

Bei Mitnahme des Kopplungsterms in der Wärmeleitgleichung gestaltet sich eine Lösung des thermoelastischen Problems weitaus aufwendiger; hierauf wird im nachfolgenden Kapitel eingegangen.

Kapitel 4

Die Lösung des gekoppelten thermoelastischen Problems

4.1 Das gekoppelte Differenzialgleichungssystem im Gebiet

Wie schon oben angesprochen, können bei Mitnahme des Kopplungsterms in der Wärmeleitgleichung die Deformationen der Mittelfläche nicht mehr unabhängig von den Temperaturfeldern im Schalenraum berechnet werden. Um ein wesentliches Verständnis der gekoppelten Analyse von Flächentragwerken zu ermöglichen, ist es hilfreich, die das *thermoelastische Problem* (im Gebiet) beschreibenden partiellen Differenzialgleichungen mit den dazugehörigen konstitutiven Beziehungen zusammenfassend darzustellen:

Durch Anwendung der *Impuls- und Drallerhaltung* erfolgt in Abschnitt 3.2 die Formulierung der *auf die Mittelfläche bezogenen Bewegungsgleichungen*:

$$\begin{aligned} n^{\alpha m} \Big|_{\alpha} + \underline{\Delta n^{\alpha m}} \Big|_{\alpha} + p^m &= K_T^m & (m = 1, 2, 3); \\ m^{\alpha\beta} \Big|_{\alpha} + \underline{\Delta m^{\alpha\beta}} \Big|_{\alpha} - n^{\beta 3} - \underline{n^{\alpha 3} \left(\Phi_{\alpha}^{\beta} - \psi_{\alpha}^{\beta} \right) - \chi_3^{\beta} \Delta m^*} &= M_T^{\beta} + \underline{\chi_3^{\beta} M_T^3} & (\beta = 1, 2). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Für die darin enthaltenen Schnittgrößen $n^{\rho\lambda}$ und $m^{\rho\lambda}$ werden in Abschnitt 3.3 *konstitutive Beziehungen* formuliert, die den folgenden allgemeinen Aufbau haben:

$$n^{\rho\lambda} = \hat{n}^{\rho\lambda} \left(\gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}, \Delta \overset{n}{T} \right), \quad m^{\rho\lambda} = \hat{m}^{\rho\lambda} \left(\gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}, \Delta \overset{n}{T} \right). \quad (4.2)$$

Die *gekoppelte Wärmeleitgleichung*, die sich aus dem 1.Hauptsatz und den Zustandsgleichungen ergibt, repräsentiert das *Prinzip der Energieerhaltung im Schalenraum*:

$$\dot{\overset{\bullet}{T}} \overset{+}{\rho} c - (\lambda \overset{+}{g}{}^{km} T_{,m}) \Big|_k + \underline{\gamma^* T \left(\dot{\gamma}_{\beta}^{\beta} + \theta^3 \dot{\kappa}_{\rho}^{\lambda} \overset{+}{\nu}_{\lambda}^{\rho} \right)} = \overset{+}{\rho} h. \quad (4.3)$$

Abgesehen von den bekannten Flächenlasten p^k und den Querkräften $n^{\alpha 3}$, für die kein Stoffgesetz existiert, können alle in den Bewegungsgleichungen (4.1) enthaltenen Größen durch die Komponenten des Verschiebungsvektors v^k (bzw. deren Ableitungen) und die *thermischen konstitutiven Variablen*

$$\Delta T(\theta^\alpha, t) = \int_{-h/2}^{h/2} (T - T_0) (\theta^3)^n d\theta^3 \quad (4.4)$$

ausgedrückt werden. Diese Variablen berechnen sich also aus der unbekannten Temperaturverteilung im Schalenraum $T(\theta^k, t)$, die über die gekoppelte Wärmeleitgleichung¹ (4.3) mit den Größen $\dot{\gamma}_\beta^\beta$ und $\dot{\kappa}_\lambda^\rho$ - die sich wiederum durch Ableitungen von v^k ausdrücken lassen - gekoppelt ist. Zusammenfassend lässt sich schließen: In dem *gekoppelten partiellen Differenzialgleichungssystem* (4.1/3), bestehend aus den 5 Bewegungsgleichungen und der Wärmeleitgleichung, sind als *unbekannte Feldgrößen*

- die drei Komponenten $v^k(\theta^\alpha, t)$ des Verschiebungsvektors
- die beiden Querkräfte $n^{\alpha 3}(\theta^\alpha, t)$
- und die Temperatur $T(\theta^k, t)$

enthalten. Während die *Feldvariablen* v^k und $n^{\alpha 3}$ auf die Mittelfläche bezogen sind, ist die Temperatur T auch in Dickenrichtung θ^3 veränderlich. Darüber hinaus hängen alle 6 Feldvariablen von der Zeit ab. Dem aus insgesamt 6 Gleichungen bestehenden partiellen Differenzialgleichungssystem des thermoelastischen Problems stehen also wiederum 6 Feldvariable gegenüber.

An dieser Stelle sei noch angemerkt, dass es bei konkreten Anwendungen meist unter Elimination der Querkräfte $n^{\alpha 3}$ gelingt, die Zahl der Bewegungsgleichungen auf 3 zu reduzieren.

Zur Lösung des gekoppelten thermoelastischen Problems müssen nun noch unterschiedliche Randbedingungen für die Schale formuliert werden. Wir wollen in diesem Zusammenhang die folgende Unterscheidung vornehmen:

- *Mechanische Randbedingungen* (z.B. vorgegebene Randverschiebungen, Randkräfte) entlang des *Randes* s der Mittelfläche.
- *Thermische Randbedingungen* (z.B. vorgegebene Wärmeströme, Temperaturen) an den *Laibungs-* und *Randflächen* des Schalenkontinuums.

Bevor wir auf die Formulierung von Randbedingungen eingehen, sollen hier noch mögliche Nichtlinearitäten in dem gekoppelten Differenzialgleichungssystem (4.1/3) diskutiert werden.

¹Die darin enthaltene *Wärmequelle* $\dot{\rho}h$ ist als 'Belastung' vorgegeben.

4.1.1 Anmerkungen zu Nichtlinearitäten

In Zusammenhang mit der Formulierung der Bewegungsgleichungen (Abschnitt 3.2) und der konstitutiven Gleichungen (Abschnitt 3.3) werden bereits Aussagen über Nichtlinearitäten in den Schalengleichungen gemacht. Das Gesagte soll hier zusammengefasst und näher erläutert werden. Des weiteren soll hier auch auf Nichtlinearitäten im Kopplungsterm eingegangen werden, die im Berechnungsbeispiel 1 (Abschnitt 7.1) numerisch ausgewertet werden.

In den Bewegungsgleichungen der Schalentheorie werden nichtlineare Effekte, die aus einer *Schiefstellung der Basisvektoren* beim Übergang in den Momentanzustand resultieren, vollständig mitgenommen. Als Folge der Schiefstellung treten in (4.1) die unterstrichenen Terme auf, die nichtlinear sind. So berechnet sich beispielsweise $\Delta n^{\alpha m}$ gemäß $(B.23)_1$ zu

$$\Delta n^{\alpha m} = \underline{\Phi_s^m n^{\alpha s}}.$$

Bei *großen elastischen Verformungen* gehen in die in den Bewegungsgleichungen enthaltenen Größen Φ_α^β , ψ_α^β und χ_3^β auch noch zusätzliche Nichtlinearitäten in den Verschiebungskomponenten v^k ein, siehe Anhang B. So ergibt sich beispielhaft für Φ_3^β bei Abbruch nach quadratischen-nichtlinearen Anteilen:

$$\Phi_3^\beta = \left(-v^3|_\alpha + \underline{v^3|_\rho v^\rho|_\alpha} \right).$$

Für die Schnittreaktionen $n^{\alpha\beta}$ und $m^{\alpha\beta}$ werden in Abschnitt 3.3 konstitutive Gleichungen im Rahmen einer *in den konstitutiven Variablen* $(\gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}, \overset{n}{\Delta T})$ *linearen Theorie* formuliert. So gilt beispielsweise:

$$n^{\rho\lambda} = D G^{\rho\lambda\epsilon\gamma} \gamma_{\epsilon\gamma} - \gamma^* \overset{0}{\Delta T} \overset{+}{a}^{\rho\lambda} \quad (1. Approximation)$$

mit

$$\gamma_{\rho\lambda} = \frac{1}{2} \left(\Phi_\lambda^\pi \overset{+}{a}_{\rho\pi} + \Phi_\rho^\pi \overset{+}{a}_{\lambda\pi} + \underline{\Phi_\lambda^s \Phi_\rho^k \overset{+}{a}_{sk}} \right)$$

bei Abbruch nach quadratischen Nichtlinearitäten in $\gamma_{\rho\lambda}$.

Wegen dem unterstrichenen Term gehen also über die *konstitutiven Beziehungen* auch wieder nichtlineare Terme (in v^k) in die Bewegungsgleichungen ein².

Stellt man also im konkreten Anwendungsfall die Bewegungsgleichungen einer Schale auf, so wird man es mit einer ganzen Reihe nichtlinearer Terme zu tun haben. Bei einer gekoppelten Analyse sind - nach Elimination der Querkräfte $n^{\alpha 3}$ - in den Bewegungsgleichungen noch die Unbekannten v^k und $\overset{n}{\Delta T}$ enthalten. Nichtlineare Terme können dann von unterschiedlicher Art sein:

1. Zum einen werden nichtlineare Terme in den Komponenten v^k (bzw. deren Ableitungen) vertreten sein: Wir sprechen dann von '*rein-mechanischen Nichtlinearitäten*'.
2. Zum anderen sind aber auch - mit Blick auf $\Delta n^{\alpha m} = \Phi_s^m n^{\alpha s}$ - Terme denkbar,

²Neben all diesen Nichtlinearitäten, die in die Bewegungsgleichungen (im Gebiet) eingehen, sind auch noch geometrisch-nichtlineare Effekte in Verbindung mit *mechanischen Randbedingungen* der Mittelfläche denkbar, die im nächsten Abschnitt behandelt werden.

die multiplikative Verknüpfungen von v^k mit ΔT^n enthalten. Wir sprechen dann von 'thermo-mechanischen Nichtlinearitäten'.

Bei der konkreten Durchführung nichtlinearer numerischer Berechnungen ist es dann in jedem Falle sinnvoll, sich vorab auf eine bestimmte Approximation bei der Mitnahme solcher Nichtlinearitäten zu einigen. Überführt man die Bewegungsgleichungen zur Lösung in eine *Arbeitsformulierung*³, so ist es beispielsweise denkbar nur maximal quadratisch-nichtlineare oder kubisch-nichtlineare Terme in den jeweiligen Arbeitsanteilen mitzunehmen: So werden in [12] *rein-mechanische Nichtlinearitäten* von maximal kubischer Ordnung mitgenommen.

Da alle - im Rahmen einer *thermoelastischen Theorie* - in die Bewegungsgleichungen eingehenden Nichtlinearitäten letztendlich auf das Phänomen 'große Verformungen' zurückzuführen sind, lässt sich schließen, dass die Mitnahme der oben erwähnten Nichtlinearitäten nur Sinn macht, wenn tatsächlich solche *großen Verformungen* an einem Schalentragswerk zu erwarten sind.

In Kapitel 5 wird eine auf dem Ljapunowschen Stabilitätsbegriff basierende *kinetische Stabilitätstheorie für Schalen* formuliert. Die hierzu gehörenden *Stabilitätsgleichungen* müssen ausgehend von den nichtlinearen Bewegungsgleichungen der Schale entwickelt werden. Eine Lösung konkreter Stabilitätsprobleme gelingt dann in der Regel mit *linearisierten* Stabilitätsgleichungen⁴. Dann kann die sogenannte *kritische Belastung* berechnet werden, bei deren Überschreiten mit einem Instabilwerden des jeweiligen Schalentragswerks zu rechnen ist.

Da wir in den Berechnungsbeispielen⁵ 1 und 2 *große Verformungen* von vornherein ausschließen und im Berechnungsbeispiel 3 die kinetische Stabilitätstheorie (mit den linearisierten Stabilitätsgleichungen) anwenden, werden also in den hier durchgeführten numerischen Analysen Nichtlinearitäten in den zu lösenden Bewegungsgleichungen - bzw. den daraus ableitbaren Arbeitsformulierungen - nicht auftreten. Für das Berechnungsbeispiel 3 (*thermisch erregte Plattenschwingungen*) werden lediglich Aussagen darüber gemacht, wann - also ab welcher Temperaturbeanspruchung - mit Instabilitäten zu rechnen ist.

Wie man in (4.3) erkennt, enthält die Wärmeleitgleichung mit dem Kopplungsterm einen nichtlinearen Ausdruck. Es handelt sich hierbei um eine multiplikative Verknüpfungen von mechanischen ($\dot{\gamma}_\beta^\beta, \dot{\kappa}_\rho^\lambda$) mit thermischen Größen (T). Im Sinne der obigen Aufzählung wollen wir in diesem Zusammenhang von *thermo-mechanischen Nichtlinearitäten* sprechen. Diese treten natürlich nur in Verbindung mit dem Kopplungsterm auf. Bei konkreten Berechnungen in der Literatur⁶, wo die Auswirkungen des Kopplungsterms analysiert werden, werden diese Nichtlinearitäten bislang nicht berücksichtigt. Das heißt, im Kopplungsterm wird üblicherweise die Temperatur im

³Siehe Abschnitt 4.5.

⁴Die Mitnahme von geometrisch-nichtlinearen Termen in den Stabilitätsgleichungen kann z.B. bei der Untersuchung *imperfekter Schalentragswerke* notwendig werden, siehe [12].

⁵Siehe Kapitel 7

⁶Siehe [26], [50], [20], [76].

Momentanzustand T durch diejenige im Ausgangszustand T_0 ersetzt:

$$\gamma^* T_0 \left(\dot{\gamma}^\beta_\beta + \theta^3 \dot{\kappa}^\lambda_\rho \dot{\nu}^\rho_\lambda \right) .$$

Diese Näherung ist immer dann möglich, wenn mit kleinen Temperaturänderungen zu rechnen ist. In Berechnungsbeispiel 1 (*Platte unter bereichsweisem Temperaturschock*), wo Temperaturdifferenzen $(T - T_0)$ von bis zu $200K$ auftreten, werden die Auswirkungen der *thermo-mechanischen Nichtlinearitäten* im Kopplungsterm bei den numerischen Analysen mitgenommen und konkrete Einflüsse auf die erzielten Berechnungsergebnisse diskutiert.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, dass die hier entwickelten Lösungskonzepte keinerlei Einschränkungen bezüglich der Mitnahme aller oben erwähnter Nichtlinearitäten machen.

4.2 Die mechanischen Randbedingungen

Wie in den Bewegungsgleichungen und den konstitutiven Beziehungen, so sollen auch hier geometrische Nichtlinearitäten konsequent eingearbeitet werden. Dabei werden wir uns auch hier wieder stark an die in [12] verwendete Bezeichnungsweise anlehnen und nur auf die für ein wesentliches Verständnis notwendigen Überlegungen eingehen.

Unterschiedliche mechanische Randbedingungen der Mittelfläche werden in möglichst knapper Form für einen - im Allgemeinen - schiefen Schalenrand (*Rand s*) formuliert⁷. Man unterscheidet in diesem Zusammenhang zwischen geometrischen und dynamischen Randbedingungen:

- Als *geometrische Randbedingungen* seien hier vorgegebene Verschiebungen bzw. Verdrehungen bezeichnet.
- Unter *dynamischen Randbedingungen* verstehen wir vorgegebene Schnittgrößen (Kräfte, Momente) am Rande - aber auch die 'Nichtexistenz' solcher Schnittgrößen am *freien Rand*.

Im Ausgangszustand wird die *Randkurve*, die das Flächentragwerk von seiner Umgebung abgrenzt, durch die Spitze des Ortsvektors $\overset{+}{\mathbf{r}}(s)$ beschrieben, wenn man darin den *Kurvenparameter* s variiert; das Gesagte lässt sich analog auf den Momentanzustand anwenden, siehe Abbildung 4.1. Der Kurvenparameter s bezeichnet im Ausgangszustand die Bogenlänge des Schalenrandes bezüglich eines festen Punktes. Die Geometrie des Schalenrandes kann dann über den Zusammenhang $\theta^\alpha = \theta^\alpha(s)$ ausgedrückt werden. Um eine sinnvolle Komponentenzerlegung am Rand vornehmen zu können, wird in $\overset{+}{P}$ ein *orthogonales Dreibein* bestehend aus

- dem *Tangentenvektor* $\overset{+}{\mathbf{t}}$ (in Richtung von s)

⁷Ausführlichere Abhandlungen zu dieser Problematik finden sich u.a. in [12], [26], [5] sowie [68].

Ausgangszustand:

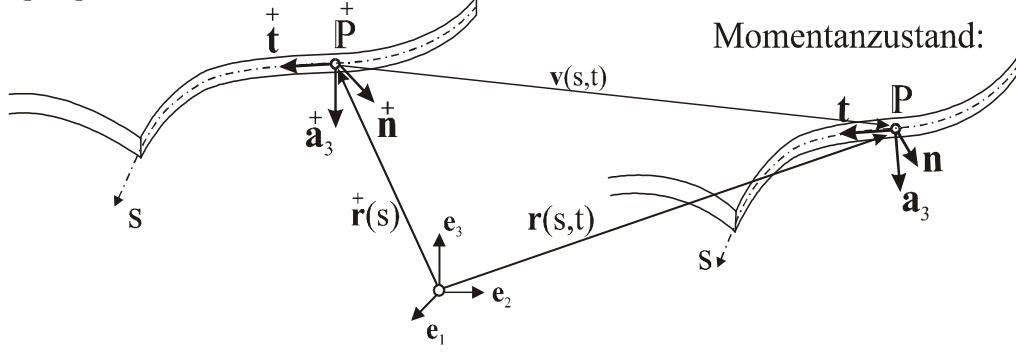


Abbildung 4.1: Kinematik des Schalenrandes

- dem *Normalenvektor* \mathbf{a}_3^+ (senkrecht zur Mittelfläche)
- und dem *Binormalenvektor* \mathbf{n}^+ .

errichtet. Die genannten Vektoren sind Einheitsvektoren. Im Ausgangszustand gilt⁸:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^+ &= \frac{\partial \mathbf{r}^+}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{r}^+}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial s} = t^\alpha \mathbf{a}_\alpha^+ \quad \text{mit} \quad t^\alpha = \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial s}; \\ \mathbf{n}^+ &= \mathbf{t}^+ \times \mathbf{a}_3^+ = -t^\alpha \epsilon_{\alpha\beta}^+ \mathbf{a}^\beta = n_\beta \mathbf{a}^\beta \quad \text{mit} \quad n_\beta = \epsilon_{\beta\alpha}^+ t^\alpha. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Wie in [12] ausführlich gezeigt wird, ergeben sich beim Übergang in den verformten Momentanzustand für die Komponenten des Tangenten- und des Binormalenvektors (es gilt $\mathbf{t} = t^\alpha \mathbf{a}_\alpha$ und $\mathbf{n} = n_\beta \mathbf{a}^\beta$) die folgenden *Transformationsvorschriften*⁹:

$$t^\alpha = (1 - \gamma_t) t^\alpha \quad \text{und} \quad n^\alpha (= n_\beta a^{\alpha\beta}) = (\delta_\beta^\alpha + \lambda_\beta^\alpha) n^\beta. \quad (4.6)$$

4.2.1 Geometrische Randbedingungen

Geometrische Randbedingungen seien hier als *Verschiebungs-* bzw. *Verdrehungsrandbedingungen* zum Zeitpunkt t am Rand s über die Vektoren $\mathbf{v}(s, t)$ und $\mathbf{a}_3(s, t)$ vorgegeben. Wie in Abbildung 4.2 veranschaulicht, dient der Normalenvektor \mathbf{a}_3 der Beschreibung von *Randdrehungen* bezüglich der Lage im Ausgangszustand. Die Zerlegung dieser Randbedingungen in Richtung des - am unverformten Schalenrand errichteten, orthogonalen - Dreieins führt dann zu der folgenden Darstellung:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(s, t) &= v^m \mathbf{a}_m = u \mathbf{t}^+ + v \mathbf{n}^+ + w \mathbf{a}_3^+; \\ \mathbf{a}_3(s, t) &= \mathbf{a}_3^+ + \Phi_3^m \mathbf{a}_m^+ = \alpha \mathbf{t}^+ + \beta \mathbf{n}^+ + \gamma \mathbf{a}_3^+. \end{aligned} \quad (4.7)$$

⁸Zur formelmäßige Bedeutung des *Permutationstensors* $\epsilon_{\alpha\beta}^+$ siehe (B.14).

⁹Siehe auch Anhang B, (B.29).

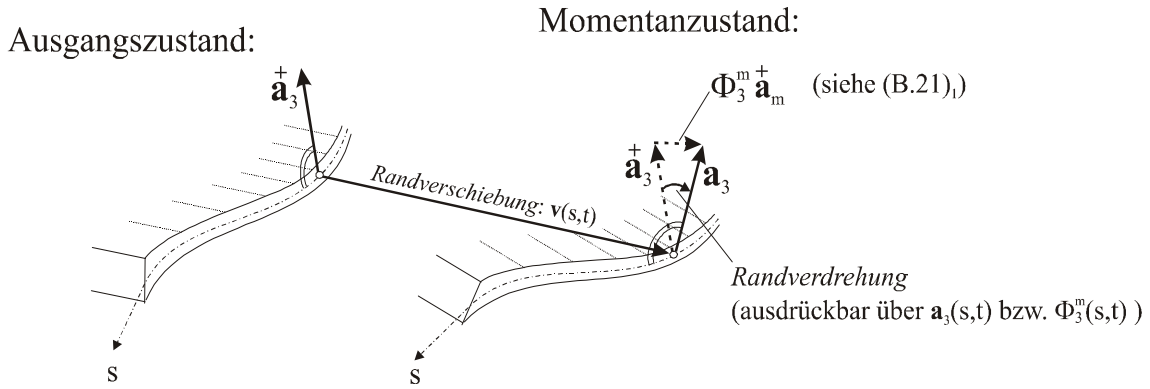


Abbildung 4.2: geometrische Randbedingungen am Schalenrand

Wie in [12] und [26] nachgewiesen wird, kann jedoch wegen der *Normalenhypothese* bei vorgegebenen Verschiebungen u , v und w nur noch über die Komponente β - die einer Randverdrehung zugeordnet ist - frei verfügt werden. Für den Rand reduziert sich damit die Zahl der erfüllbaren Randbedingungen auf 4.

Will man z.B. einen *eingespannten Schalenrand* beschreiben, so gelingt dies, indem man $\beta(s, t) = 0$ setzt.

4.2.2 Dynamische Randbedingungen

Die Formulierung dynamischer Randbedingungen gelingt, indem man - wie in Abbildung 4.3 dargestellt - ein durch die Koordinatenlinien θ^1 , θ^2 und den Rand s begrenztes *Randelement* herauschneidet und an diesem die angreifenden Kräfte und Momente anträgt. Neben den im Inneren wirkenden Schnittgrößen werden am Rand mögliche *Auflagerreaktionen* $\mathbf{n}_{(a)}ds$ und $\mathbf{m}_{(a)}ds$ sowie mögliche *eingeprägte Randkräfte* $\mathbf{n}_{(e)}$ und -momente $\mathbf{m}_{(e)}ds$ berücksichtigt.

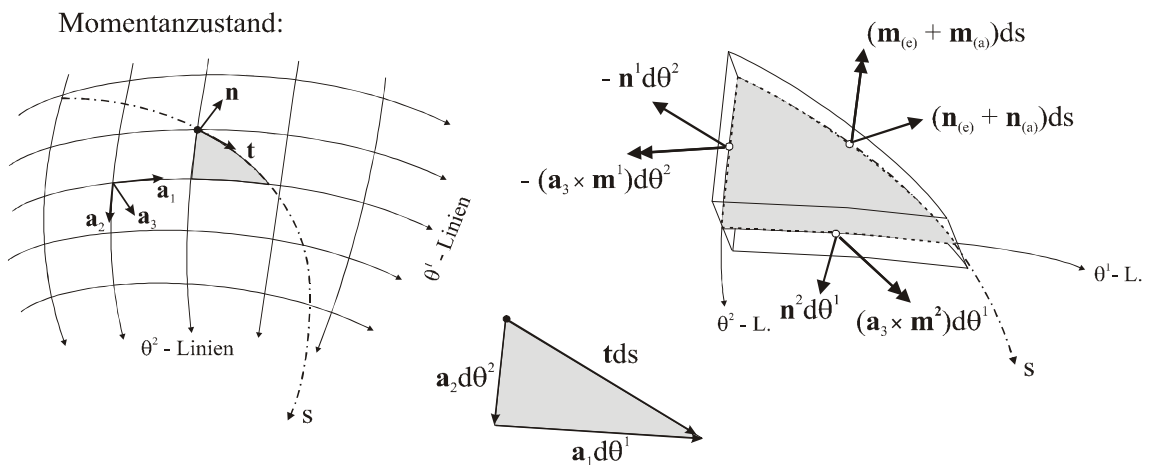


Abbildung 4.3: dynamische Randbedingungen am Schalenrand

Anteile aus Trägheitskräften und Flächenlasten können hier vernachlässigt werden, da sie zu *von höherer Ordnung kleinen* Beiträgen führen würden.

Eine *Komponentendarstellung* für die (richtungstreuen) Randlasten und die Auflagerreaktionen erhält man, indem man in Richtung des am Rand errichteten orthogonalen Dreibeins zerlegt. Hierbei ist es sinnvoll, die äußeren Streckenmomente ($\mathbf{m}_{(e)}$, $\mathbf{m}_{(a)}$) in Richtung des verformten Schalenrandes zu zerlegen, da Momente in Richtung der Schalennormalen \mathbf{a}_3 von den inneren Momenten nicht aufgenommen werden können. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{(e)} &= T_{(e)} \overset{+}{\mathbf{t}} + N_{(e)} \overset{+}{\mathbf{n}} + A_{(e)} \overset{+}{\mathbf{a}}_3 \quad ; \quad \mathbf{n}_{(a)} = T_{(a)} \overset{+}{\mathbf{t}} + N_{(a)} \overset{+}{\mathbf{n}} + A_{(a)} \overset{+}{\mathbf{a}}_3 \quad ; \\ \mathbf{m}_{(e)} &= M_{(e)} \overset{+}{\mathbf{t}} + B_{(e)} \overset{+}{\mathbf{n}} \quad ; \quad \mathbf{m}_{(a)} = M_{(a)} \overset{+}{\mathbf{t}} + B_{(a)} \overset{+}{\mathbf{n}} . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Die Prinzipien der Impuls- und Drallerhaltung führen dann zu den folgenden *vektoriellen Bewegungsgleichungen am Rande*¹⁰:

$$\frac{1}{\sqrt{\overset{+}{a}}} \mathbf{n}^\alpha \overset{+}{n}_\alpha = \mathbf{n}_{(e)} + \mathbf{n}_{(a)} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{\overset{+}{a}}} (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{m}^\alpha) \overset{+}{n}_\alpha = \mathbf{m}_{(e)} + \mathbf{m}_{(a)} . \quad (4.9)$$

Gemäß [12] kann man diese vektoriellen Gleichgewichtsbedingungen auch in Komponentenform angeben. Ohne die in [12] auch berücksichtigten nicht-richtungstreuen Randlasten erhält man die folgenden *Komponentengleichungen* für die Kräfte in Richtung der Basisvektoren des Ausgangszustandes $\overset{+}{\mathbf{a}}_\beta$ bzw. $\overset{+}{\mathbf{a}}_3$:

$$\begin{aligned} \overset{+}{n}_\alpha (n^{\alpha\beta} + \Delta n^{\alpha\beta}) &= (T_{(e)} + T_{(a)}) \overset{+}{t}^\beta + (N_{(e)} + N_{(a)}) \overset{+}{n}^\beta \quad ; \\ \overset{+}{n}_\alpha (n^{\alpha 3} + \Delta n^{\alpha 3}) &= A_{(e)} + A_{(a)} . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Für die Momente gilt in Richtung von $\overset{+}{\mathbf{a}}_3 \times \overset{+}{\mathbf{a}}_\beta$:

$$\begin{aligned} \overset{+}{n}_\alpha (m^{\alpha\beta} + \Delta m^{\alpha\beta} - \chi_3^\beta \Delta m^{\alpha 3}) &= \\ \left[(M_{(e)} + M_{(a)}) n^\rho - (B_{(e)} + B_{(a)}) t^\rho \right] (\delta_\rho^\beta + \Phi_\rho^\beta - \chi_3^\beta \Phi_\rho^3) . \end{aligned} \quad (4.11)$$

In den obigen Gleichgewichtsbedingungen am Rande wurden geometrische Nichtlinearitäten, die auf eine Schiefstellung der Basisvektoren im verformten Momentanzustand zurückzuführen sind, konsequent mitgenommen¹¹. Immer dann, wenn man über Auflagerreaktionen *vorab* Aussagen machen kann, resultieren aus den Komponentengleichungen (4.10) bzw. (4.11) *dynamische Randbedingungen*.

Sonderfall eines freien Schalenrandes:

Für diesen Fall müssen sich alle fünf Auflagerreaktionen ($T_{(a)}$, $N_{(a)}$, $A_{(a)}$, $M_{(a)}$, $B_{(a)}$) zu Null ergeben. Aufgrund der Normalenhypothese können aber diese 5 (dynamischen) Randbedingungen nicht unabhängig voneinander erfüllt werden¹². Man kann

¹⁰Die einzelnen Überlegungen bzw. Umformungen, die schließlich zu (4.9) führen, sind in [26] ausführlicher dargelegt.

¹¹In Anhang B findet sich die formelmäßige Bedeutung der Größen $\Delta n^{\alpha m}$, $\Delta m^{\alpha\beta}$, Φ_α^β , χ_3^β .

¹²Vgl. mit Abschnitt 4.2.1.

aber durch die im Folgenden geschilderte Vorgehensweise Abhilfe schaffen: Die 5 Auflagerreaktionen werden durch 4 *statisch gleichwertige* Randlasten ersetzt. Bei dieser Vorgehensweise müssen dann am freien Schalenrand nur noch 4 dynamische Randbedingungen unabhängig voneinander erfüllt werden, was bei Gültigkeit der Normalenhypothese möglich ist.

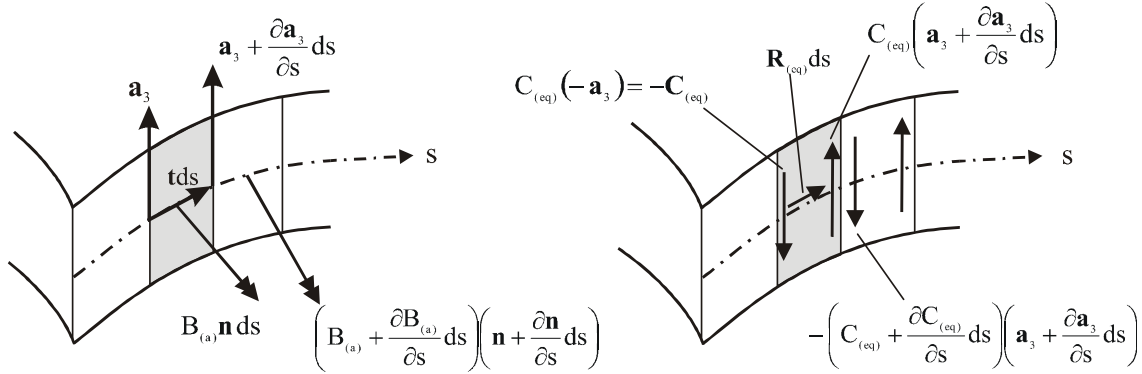


Abbildung 4.4: Einführung von Ersatzkräften am freien Schalenrand

Wie in Abbildung 4.4 dargestellt, werden hier die *zusätzlichen Randlasten* $\mathbf{C}_{(eq)}$ und $\mathbf{R}_{(eq)}$ eingeführt, die das *Randdrillmoment* $\mathbf{B}_{(a)} = B_{(a)} \mathbf{n}$ ersetzen. Aus den Momenten- und Kräftegleichgewichtsbedingungen resultiert der folgende Zusammenhang:

$$C_{(eq)} = B_{(a)} \quad \text{und} \quad \mathbf{R}_{(eq)} = -C_{(eq)} \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial s} = -B_{(a)} \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial s}. \quad (4.12)$$

Für ein Element des Schalenrandes (in Abbildung 4.4 grau hinterlegt) bedeutet dies: Man ersetzt die 'Momentenwirkung' des Drillmomentes durch ein gegenständiges Paar von Ersatzkräften vom Betrag $C_{(eq)}$; $\mathbf{R}_{(eq)}$ muss dann genau so gewählt werden, dass aus der Summe aller Ersatzkräfte am Element keine zusätzliche 'Kraftwirkung' resultiert.

Dadurch gelingt die Elimination des Drillmomentes und der dazugehörigen dynamischen Randbedingung. In den Kräftegleichgewichtsbedingungen am Rande muss dann neben den üblichen Auflagerreaktionen ($T_{(a)}$, $N_{(a)}$, $A_{(a)}$) noch $\mathbf{R}_{(eq)}$ und die an der Grenze zweier Randelemente verbleibende Resultierende $\Delta \mathbf{C}_{(eq)} = -\frac{\partial C_{(eq)}}{\partial s} \mathbf{a}_3$ berücksichtigt werden. Für diese gilt, wie in [12] und [26] ausführlicher gezeigt wird, unter Beachtung von (4.12) die folgende *Komponentenzerlegung*:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{(eq)} &= \Delta T_{(R)} \mathbf{t} + \Delta N_{(R)} \mathbf{n} + \Delta A_{(R)} \mathbf{a}_3; \quad \Delta \mathbf{C}_{(eq)} = \Delta T_{(C)} \mathbf{t} + \Delta N_{(C)} \mathbf{n} + \Delta A_{(C)} \mathbf{a}_3 \\ \text{mit } \Delta T_{(R)} &= B_{(a)} b_\alpha^\rho \left(\delta_\rho^\beta + \Phi_\rho^\beta \right) t_\beta^\dagger t^\alpha; \quad \Delta T_{(C)} = -\frac{\partial B_{(a)}}{\partial s} \Phi_3^\beta t_\beta^\dagger; \\ \Delta N_{(R)} &= B_{(a)} b_\alpha^\rho \left(\delta_\rho^\beta + \Phi_\rho^\beta \right) n_\beta^\dagger t^\alpha; \quad \Delta N_{(C)} = -\frac{\partial B_{(a)}}{\partial s} \Phi_3^\beta n_\beta^\dagger; \\ \Delta A_{(R)} &= B_{(a)} b_\alpha^\rho \Phi_\rho^3 t^\alpha; \quad \Delta A_{(C)} = -\frac{\partial B_{(a)}}{\partial s} (1 + \Phi_3^3). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Addiert man nun diese zusätzlich zu berücksichtigenden Komponenten zu den herkömmlichen Auflagerkräften, so ergeben sich die *Lager-Ersatzkräfte*

$$\Delta T_{(E)} = T_{(a)} + \Delta T_{(R)} + \Delta T_{(C)}, \quad \Delta N_{(E)} = N_{(a)} + \Delta N_{(R)} + \Delta N_{(C)}, \quad (4.14)$$

$$\Delta A_{(E)} = A_{(a)} + \Delta A_{(R)} + \Delta A_{(C)},$$

die neben dem Randbiegemoment $M_{(a)}$ am freien Schalenrand zu Null zu setzen sind. Somit verbleiben insgesamt 4 erfüllbare dynamische Randbedingungen am freien Schalenrand.

Auf *federnde Lagerungen* des Schalenrandes, bei denen eine Beziehung zwischen Rand-schnittgrößen und -verformungen vorgegeben ist, soll hier nicht eingegangen werden¹³.

4.3 Die thermischen Randbedingungen

Für die in dem gekoppelten Differenzialgleichungssystem (4.1/3) enthaltenen unbekannten Temperaturfelder müssen an denjenigen Flächen, die das System 'Schale' von seiner Umgebung abgrenzen, die *thermischen Randbedingungen* formuliert werden. Diese *Begrenzungsflächen* werden unterschieden in

- *Laibungsflächen* im Abstand h (oben: $\theta^3 = h/2$; unten: $\theta^3 = -h/2$) und den
- *Randflächen* entlang der Parameterlinie s .

Auf ganz besonders einfachem Wege gelingt die Formulierung der Randbedingungen, wenn an den Begrenzungsflächen die Temperaturen vorgegeben sind. Wir wollen in diesem Zusammenhang von *Temperaturrandbedingungen* sprechen. Ist also im Rahmen konkreter Berechnungen die Temperatur $T_{(s)}$, die auch von der Zeit abhängen kann, an den *Randflächen* vorgegeben, so gilt¹⁴:

$$T(s, t) = T_{(s)}(s, t). \quad (4.15)$$

Sind die Temperaturen $T_{(o)}$ bzw. $T_{(u)}$ an der *oberen* bzw. *unteren Laibungsfläche* vorgegeben, so gelten die folgenden Randbedingungen:

$$T(\theta^\alpha, h/2, t) = T_{(o)}(\theta^\alpha, t) \quad \text{bzw.} \quad T(\theta^\alpha, -h/2, t) = T_{(u)}(\theta^\alpha, t) \quad (4.16)$$

Wie man in (4.15) und (4.16) erkennen kann, sind die 'vorgegebenen Temperaturen' eigentlich *Temperaturfelder*, die von Orts- und Zeitkoordinaten abhängen können; das Gesagte lässt sich auch auf diejenigen thermischen Randbedingungen übertragen, bei denen über Wärmeströme Aussagen gemacht werden.

Unter Beachtung der Ausführungen in Abschn. 1.4 sind solche *Aussagen über die Wärmeströme an den Begrenzungsflächen* in unterschiedlicher Form denkbar:

¹³Das Anwendungsbeispiel eines *federnd gelagerten Schalenrandes* wird in [12] behandelt

¹⁴Wir wollen hier annehmen, dass an den *Randflächen* die thermischen Randbedingungen lediglich von der Ortskoordinate s , nicht aber von θ^3 abhängen.

- Die auftretenden Wärmeströme (z.B. infolge Sonneneinstrahlung) sind vorab bekannt; wir sprechen dann von *Wärmestromrandbedingungen*.
- Die auftretenden Wärmeströme berechnen sich aus der Oberflächentemperatur und der Temperatur eines umgebenden Fluids bzw. Gases; wir sprechen dann von *Konvektionsrandbedingungen*.
- Bei *Strahlungsrandbedingungen* existieren meist komplizierte nichtlineare Zusammenhänge zwischen den Oberflächentemperaturen gegenüberstehender Körper, aus denen sich die auftretenden Wärmeströme - in der Regel nur noch numerisch (z.B. mittels der FEM) - berechnen lassen.

Um für all diese Fälle thermische Randbedingungen für die unbekannte Temperaturverteilung $T(\theta^k, t)$ formulieren zu können, wenden wir - in Anlehnung an die Vorgehensweise in [26] - das *Prinzip der Energieerhaltung*, also den 1.Hauptsatz, auf *Randelemente* des Schalenkontinuums an. Die Formulierungen in [26] werden dahingehend erweitert, dass hier auch die Randbedingungen für *konvektiven Wärmeübergang* konsequent eingearbeitet werden.

Da sich zeigen lässt, dass für solche Randelemente Anteile aus Spannungsleistung \dot{W} und zeitlicher Änderung der inneren Energie \dot{U} zu *von höherer Ordnung kleinen* Beiträgen gegenüber \dot{Q} führen, verbleibt in (2.35) hier:

$$DQ = 0 \quad \text{bzw.} \quad \dot{Q} = 0. \quad (4.17)$$

Die Summe aller während der Zeit Dt einem solchen Randelement zuströmenden Wärmemengen muss sich also zu Null ergeben.

Wir betrachten zunächst Volumenelemente an der oberen und unteren Laibungsfläche, siehe Abbildung 4.5.

Dem Volumenelement der oberen Laibungsfläche soll während der Zeit Dt die Wärmemenge $DQ_{(o)}$ aus der Umgebung des Systems (Schale) zuströmen, während dem Volumenelement der unteren Laibungsfläche die Wärmemenge $DQ_{(u)}$ zuströmt. Nach Einsetzen der jeweiligen, in Abbildung 4.5 dargestellten Beiträge in (4.17)₂ verbleibt für die beiden Randelemente¹⁵:

$$\dot{Q}_{(o)} + \overset{3}{\dot{Q}} = 0 \quad (\text{oben: } \theta^3 = \frac{h}{2}); \quad \dot{Q}_{(u)} - \overset{3}{\dot{Q}} = 0 \quad (\text{unten: } \theta^3 = -\frac{h}{2}). \quad (4.18)$$

Gemäß (2.14)₃ führen wir den Wärmestrom h^3 ein, der auf die infinitesimale Fläche des Ausgangszustandes $d\overset{+}{A}_3$ bezogen ist:

$$\overset{3}{\dot{Q}} = h^3 d\overset{+}{A}_3. \quad (4.19)$$

¹⁵(4.18) - und ebenso (4.22) - ergibt sich wiederum nach Streichen aller Beiträge, die *von höherer Ordnung klein* sind, ausführlicher in [26].

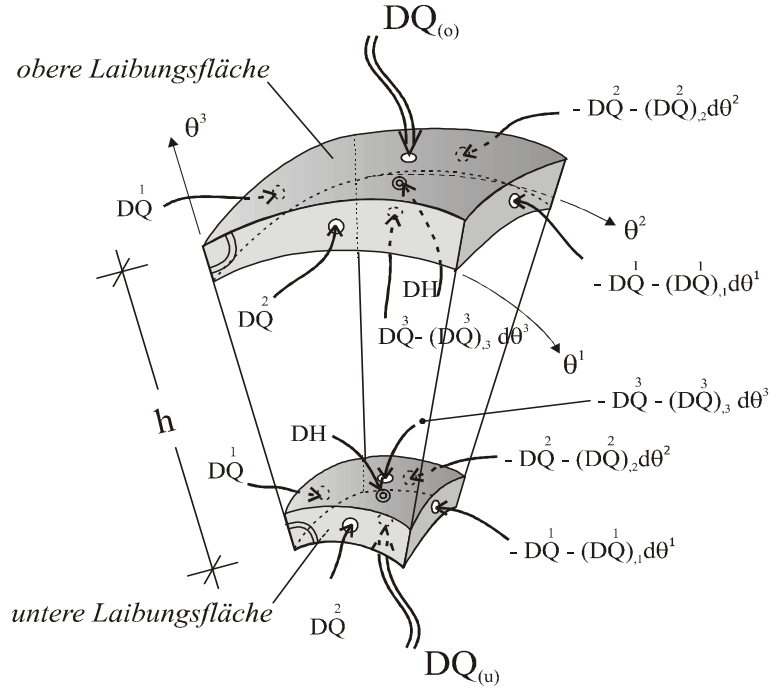


Abbildung 4.5: Die während der Zeit Dt einströmenden Wärmemengen an Randelementen der Laibungsflächen

Analog hierzu wird mit den von oben und unten zuströmenden Wärmemengen verfahren: Wir führen die Wärmeströme $q_{(o)}$ und $q_{(u)}$ folgendermaßen ein:

$$\dot{Q}_{(o)} = q_{(o)} d\overset{+}{A}_3; \quad \dot{Q}_{(u)} = q_{(u)} d\overset{+}{A}_3. \quad (4.20)$$

$d\overset{+}{A}_3$ bezeichnet hier die jeweilige infinitesimale Fläche an der oberen bzw. unteren Laibungsfläche. Wegen der Normalenhypothese (es gilt: $\overset{+}{g}^{33} = 1$) lässt sich zeigen, dass es sich hierbei um 'physikalische' Flächen handelt¹⁶. Dieser Sachverhalt ist deshalb bemerkenswert, da nur unter der Voraussetzung, dass die Wärmeströme $q_{(o)}$ und $q_{(u)}$ auf *reale* Flächen bezogene sind, die in Abschnitt 1.4.2/3 formulierten Stoffgesetze für Konvektion und Strahlung - mit den dazugehörigen Stoffkonstanten - hier weiterverwendet werden können.

Setzt man nun (4.19) und (4.20) in (4.18) ein, so folgen die *Wärmeleitgleichungen an der oberen und unteren Laibungsfläche*:

$$-h^3 = \lambda T_{,3} = q_{(o)} \quad (\text{oben: } \theta^3 = \frac{h}{2}); \quad h^3 = -\lambda T_{,3} = q_{(u)} \quad (\text{unten: } \theta^3 = -\frac{h}{2}). \quad (4.21)$$

In (4.21) wird das Stoffgesetz (3.69)₂ für die Wärmeströme in 3-Richtung berücksichtigt. Für den Fall, dass die Wärmeströme $q_{(o)}$ bzw. $q_{(u)}$ vorgegeben sind, resultieren aus (4.21) *Wärmestromrandbedingungen*.

Als nächstes wollen wir ein Rand- bzw. Volumenelement am schiefen Schalenrand betrachten, siehe Abbildung 4.6.

¹⁶Siehe [19].

Ist $q_{(s)}$ vorgegeben, so resultieren hieraus *Wärmestromrandbedingungen* an den Randflächen entlang der Parameterlinie s (Rand s).

Zusammenfassend sollen nun die unterschiedlichen Möglichkeiten zur Formulierung thermischer Randbedingungen in einer Tabelle dargestellt werden, siehe Tabelle 4.1.

	<i>Temperatur-RB</i>	<i>Wärmestrom-RB</i>	<i>Konvektions-RB</i>
obere Laib.-Fl.	$T = T_{(o)}$	$\lambda T_{,3} = q_{(o)}$	$\lambda T_{,3} = -\alpha_{(o)}(T - T_{(o)}^\infty)$
$\theta^3 = h/2$	$[T_{(o)}(\theta^\alpha, t) \text{ vorgeg.}]$	$[q_{(o)}(\theta^\alpha, t) \text{ vorgeg.}]$	$[T_{(o)}^\infty(\theta^\alpha, t), \alpha_{(o)} \text{ vorgeg.}]$
untere Laib.-Fl.	$T = T_{(u)}$	$-\lambda T_{,3} = q_{(u)}$	$-\lambda T_{,3} = -\alpha_{(u)}(T - T_{(u)}^\infty)$
$\theta^3 = -h/2$			
Rand s	$T = T_{(s)}$	$\lambda \phi^\beta T_{,\beta} = q_{(s)}$	$\lambda \phi^\beta T_{,\beta} = -\alpha_{(s)}(T - T_{(s)}^\infty)$

Tabelle 4.1: thermische Randbedingungen

In der letzten Spalte der Tabelle werden auch *Konvektionsrandbedingungen* formuliert, die sich ergeben, wenn man in die Wärmeleitgleichungen (4.21) und (4.25) das *Stoffgesetz für den konvektiven Wärmeübergang* (1.35) einsetzt. Dieses Stoffgesetz besagt: Ist die Temperaturdifferenz zwischen der Begrenzungsfläche eines Festkörpers und seiner (flüssigen oder gasförmigen) Umgebung bekannt, so kann der *abgegebene Wärmestrom infolge Konvektion*¹⁹ berechnet werden. Als Proportionalitätsfaktor wird in diesem Zusammenhang der *Wärmeübergangskoeffizient* α verwendet, den wir als konstant ansehen. Um je nach Begrenzungsfläche die vorgegebenen Größen unterscheiden zu können, versehen wir diese - wie schon oben -

- an der oberen Laibungsfläche mit ' (o) ',
- an der unteren Laibungsfläche mit ' (u) ' und
- an den Randflächen - entlang der Parameterlinie s - mit ' (s) '.

Abschließend soll hier noch auf die praktische Relevanz der unterschiedlichen thermischen Randbedingungen eingegangen werden. Gemäß den Ausführungen in Abschnitt 1.4 unterscheidet man im Allgemeinen zwischen drei Formen der Wärmeübertragung: *Wärmeleitung*, *Konvektion* und *Strahlung*. Während Wärmeübergang durch Konvektion und Strahlung an den Begrenzungsflächen eines Festkörpers (hier das Schalenkontinuum) stattfindet, wird Wärmeleitung maßgeblich innerhalb eines Festkörperkontinuums. Im Bereich der Lager kann das Phänomen Wärmeleitung aber

¹⁹Da wir hier einströmende Wärmemengen positiv definiert haben, erhalten die Wärmeströme gemäß (1.35) hier ein negatives Vorzeichen, siehe Tabelle 4.1. (rechte Spalte).

auch an den Begrenzungsflächen auftreten, wenn beispielsweise eine Stahlschale in einem Betonfundament verankert wird. An den Kontaktflächen zwischen den beiden Materialien Stahl und Beton kommt es dann - wie man sich leicht vorstellen kann - ausschließlich zu einem thermischen Energietransport durch Wärmeleitung. Die Formulierung realitätsnaher thermischer Randbedingungen ist dann nicht ohne Weiteres möglich, da man strenggenommen, das Phänomen Wärmeleitung auch in angrenzenden Tragbereichen der Schale (Lagerkonstruktion, Boden) durch Differenzialgleichungen beschreiben müsste. Da bei Flächentragwerken solche Kontaktflächen in der Regel örtlich begrenzt sind, wird man dort im Rahmen konkreter Berechnungen versuchen, einfache Näherungen für die thermischen Randbedingungen zu verwenden.

Schalentragwerke werden meist entlang des Randes s gelagert. In Zusammenhang mit dem oben Gesagten ist es deshalb auch nicht verwunderlich, dass bei einigen Berechnungsbeispielen in der Literatur²⁰ die Randflächen als wärmeisoliert ($q = 0$) angenommen werden - es handelt sich hierbei um eine Näherung. Wir sprechen dann von *Wärmestromrandbedingungen*.

Solche Randbedingungen kommen aber auch - wie schon in Abschnitt 1.4.3 geschildert - zum Einsatz, wenn man mit der thermischen 'Belastung' von Bauteilen unter Sonneneinstrahlung rechnen will. Wie in (1.41) angedeutet, wird für den durch Sonneneinstrahlung hervorgerufenen Wärmestrom dann häufig ein konstanter Wert angesetzt, der sich unter Berücksichtigung einer Reihe von Einflussfaktoren vorab berechnen lässt. Bei gekrümmten Flächentragwerken ist ein solcher konstanter Wert aber schwer vorstellbar: So kann man sich leicht vorstellen, dass z.B. für einen im Freien stehenden zylindrischen Tank mit vertikaler Achse dieser Wärmestrom - je nach Sonnenstand bzw. Tageszeit - vom Radialwinkel²¹ der Schale abhängen muss. Im allgemeinsten Fall wird also dieser Wärmestrom, der an der äußeren Laibungsfläche wirkt, eine Feldgröße sein, die von Ort und Zeit abhängt: $q(\theta^\alpha, t)$. Ist er vorab bekannt, so können Wärmestromrandbedingungen gemäß Tabelle 4.1 formuliert werden.

Von *Temperaturrandbedingungen* sprechen wir, wenn Temperaturen an den Begrenzungsflächen des Schalentragwerks vorab bekannt sind. Denkbar ist dieser Fall, wenn solche Temperaturfelder an einem zu untersuchenden Tragwerk vorab durch Messungen bestimmt werden, um sie dann (später) in der Berechnung als Randbedingungen zu berücksichtigen. So werden zur Berücksichtigung der thermischen Belastung im Brandfall in [24] Aussagen über die zu erwartenden Temperaturen gemacht, die vermutlich auf Messungen beruhen. Vorgegebene Temperaturen - je nach thermischer Beanspruchung - finden sich aber auch in den Normen zur Tragwerksplanung, siehe [22].

Bei *konvektivem Wärmeübergang* kann das hierzu gehörende Stoffgesetz (1.35) - wie oben geschildert - auf einfachem Wege in die Wärmeleitgleichungen am Rande eingesetzt werden. Sind die jeweiligen Umgebungstemperaturen T^∞ und Wärmeübergangskoeffizienten α bekannt, so ergeben sich *Konvektionsrandbedingungen*,

²⁰Siehe z.B. [50], [20], [1].

²¹Radialwinkel: θ^2 in Abbildung 7.6.

wie sie in Tabelle 4.1 dargestellt sind. Da die Laibungsflächen realer Schalenträgerwerke häufig von einem gasförmigen bzw. flüssigen Medium umgeben sind, wird man dann im Rahmen konkreter, realitätsnaher Berechnungen mit Konvektionsrandbedingungen arbeiten. Thermische Beanspruchungen treten immer dann auf, wenn man Gase oder Flüssigkeiten mit den Laibungsflächen in Berührung bringt, die entweder heißer oder kälter als diese sind. Im Extremfall, wenn solche Beanspruchungen schockartig aufgebracht werden, können diese sogar zu Schwingungen der Struktur führen²². Die Werte für α , die aus Tabellenwerken übernommen werden können, hängen nicht nur vom Material der Schale und dem jeweiligen umgebenden Medium, sondern insbesondere von der Geschwindigkeit zwischen beiden ab.

Auf *Strahlungsrandbedingungen*, wie sie sich aus Stoffgesetzen vom Typ (1.36)-(1.38) ergeben würden, wird hier und im Folgenden nicht eingegangen, da sie zum einen - wie in Abschnitt 1.4.3 exemplarisch gezeigt - erst bei sehr hohen Temperaturen an Bedeutung gewinnen, und zum anderen in der Regel nicht mehr analytisch formuliert werden können.

4.4 Die Abspaltung des quasistatischen Problems

Das hier zum Einsatz kommende numerische Lösungskonzept soll nun in kurzen Worten beschrieben werden²³: Zur Lösung des gekoppelten Differenzialgleichungssystems (4.1/3), bestehend aus den Bewegungsgleichungen und der Wärmeleitgleichung, mit den dazugehörigen mechanischen und thermischen Randbedingungen spalten wir zunächst die unbekannten Feldgrößen jeweils in einen quasistatischen und einen dynamischen Anteil auf. Diese Aufspaltung führt dann - wie unten gezeigt wird - zur *Abspaltung des quasistatischen Problems*, worunter wir ein entkoppeltes Differenzialgleichungssystem im Gebiet mit dazugehörigen (inhomogenen) Randbedingungen verstehen. Da dieses Problem entkoppelt ist, ist eine numerische Lösung (z.B. mittels eines kommerziellen FEM-Programmes) mit erträglichem Aufwand möglich. Wir wollen dann im weiteren Verlauf annehmen, dass die quasistatischen Lösungsanteile bekannt seien. Das verbleibende *dynamische Problem* ist gekoppelt, die beschreibenden Differenzialgleichungen im Gebiet sind vergleichbar mit denen in (4.1/3). Auf die Lösung dieses Problems wird in Abschnitt 4.5/6 ausführlich eingegangen, sie basiert auf einer Überführung der lokalen Differenzialgleichungen in globale Integralgleichungen. Für die Feldvariablen werden Ansätze - mit bekannten Orts- und unbekannten Zeitfunktionen - gemacht, wobei wir als Ortsfunktionen *Eigenformen* verwenden, die sich bei Ausnutzung von *Orthogonalitätsbedingungen* als überaus günstig für eine numerische Umsetzung erweisen. Geometrische Nichtlinearitäten in den Verschiebungskomponenten v^k werden konsequent mitgenommen, was eine Übertragung des Lösungskonzepts auf *thermomechanisch gekoppelte Stabilitätsprobleme* - wie in Kapitel 5 dargestellt - ohne großen Mehraufwand ermöglicht.

²²Zu schockartigen, thermischen Beanspruchungen bei Konvektion siehe [20].

²³Auf die konkrete (programmtechnische) Umsetzung wird in Kapitel 6 eingegangen.

Wir beginnen also mit der Aufspaltung der Feldvariablen $T = T(\theta^k, t)$ in einen quasistatischen und einen dynamischen Anteil. Für die unbekannte Temperatur (-verteilung) im Schalenraum gilt dann:

$$T = \underbrace{\check{T}}_{\text{quasistat.}} + \underbrace{\tilde{T}}_{\text{dyn.}} . \quad (4.26)$$

Quasistatische Größen werden im Folgenden mit einem aufgesetzten 'v', und dynamische mit einem aufgesetzten '~' gekennzeichnet.

Durch Einsetzen von (4.26) in das allgemeine Stoffgesetz für die Wärmeströme (E.7) lassen sich diese ebenfalls aufspalten:

$$h^k = \check{h}^k + \tilde{h}^k \quad \text{mit} \quad \check{h}^k = -\lambda g^{km} \check{T}_{,m} \quad \text{und} \quad \tilde{h}^k = -\lambda g^{km} \tilde{T}_{,m} . \quad (4.27)$$

Für die den Bewegungsgleichungen zugeordneten Unbekannten der Mittelfläche $v^k(\theta^\alpha, t)$ und $n^{\alpha\beta}(\theta^\alpha, t)$ wird nun ebenso verfahren:

$$v^k = \check{v}^k + \tilde{v}^k; \quad n^{\alpha\beta} = \check{n}^{\alpha\beta} + \tilde{n}^{\alpha\beta} . \quad (4.28)$$

Denkt man sich die Größen \check{v}^k und \tilde{v}^k jeweils als quasistatische und dynamische Komponenten eines Verschiebungsvektors, so ergibt sich auch für den Verschiebungsvektor der Mittelfläche:

$$\underbrace{\mathbf{v}}_{v^k \overset{+}{\mathbf{a}}_k} = \underbrace{\check{\mathbf{v}}}_{\check{v}^k \overset{+}{\mathbf{a}}_k} + \underbrace{\tilde{\mathbf{v}}}_{\tilde{v}^k \overset{+}{\mathbf{a}}_k} . \quad (4.29)$$

Ausgehend von (4.26) und (4.28) lassen sich auch alle weiteren - den jeweiligen Momentanzustand der Schalenmittelfläche beschreibenden - Größen additiv in einen quasistatischen und einen dynamischen Anteil aufspalten. So gilt für die Basisvektoren:

$$\underbrace{\mathbf{a}_k}_{(\delta_k^i + \Phi_k^i) \overset{+}{\mathbf{a}}_i} = \underbrace{\check{\mathbf{a}}_k}_{(\delta_k^i + \check{\Phi}_k^i) \overset{+}{\mathbf{a}}_i} + \underbrace{\tilde{\mathbf{a}}_k}_{\tilde{\Phi}_k^i \overset{+}{\mathbf{a}}_i} \Rightarrow \Phi_k^i = \check{\Phi}_k^i + \tilde{\Phi}_k^i \quad (4.30)$$

und für die Schnittreaktionen unter Beachtung der konstitutiven Beziehungen:

$$\begin{aligned} n^{\alpha\beta} &= \check{n}^{\alpha\beta} + \tilde{n}^{\alpha\beta} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{n}^\alpha = \check{\mathbf{n}}^\alpha + \tilde{\mathbf{n}}^\alpha; \\ m^{\alpha\beta} &= \check{m}^{\alpha\beta} + \tilde{m}^{\alpha\beta} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{m}^\alpha = \check{\mathbf{m}}^\alpha + \tilde{\mathbf{m}}^\alpha . \end{aligned} \quad (4.31)$$

Die mit einem aufgesetzten 'v' gekennzeichneten Anteile hängen ausschließlich vom quasistatischen Zustand - und damit von den Komponenten \check{v}^k des quasistatischen Verschiebungsvektors - ab. Die Anteile mit '~' bezeichnen diejenigen Terme, die die dynamischen Verschiebungskomponenten \tilde{v}^k enthalten, die aber auch nichtlinear mit den quasistatischen Komponenten \check{v}^k verknüpft sein können. So ergibt sich beispielhaft im Rahmen einer geometrisch nichtlinearen Theorie - bei Abbruch nach quadratischen

Anteilen in den Verschiebungskomponenten gemäß $(B.21)_3$ - für die jeweiligen Anteile in den Deformationskoeffizienten Φ_3^β :

$$\check{\Phi}_3^\beta = (-\check{v}^3|_\alpha + \check{v}^3|_\rho \check{v}^\rho|_\alpha + \dots) \check{a}^{\alpha\beta} \quad (4.32)$$

$$\tilde{\Phi}_3^\beta = (-\tilde{v}^3|_\alpha + \tilde{v}^3|_\rho \tilde{v}^\rho|_\alpha + \tilde{v}^3|_\rho \check{v}^\rho|_\alpha + \tilde{v}^3|_\rho \tilde{v}^\rho|_\alpha + \dots) \check{a}^{\alpha\beta}.$$

Temperaturänderungen im Schalenraum haben Einfluss auf die Schnittreaktionen der Mittelfläche, für die in Abschnitt 3.3 die *konstitutiven Gleichungen* formuliert werden. Gemäß (3.41) haben Temperaturänderungen im Schalenraum Einfluss auf die *konstitutiven thermischen Variablen*, für die dann wegen (4.26) ebenfalls eine Aufspaltung in einen quasistatischen und einen dynamischen Anteil möglich wird:

$$\Delta \overset{n}{T} = \Delta \overset{n}{\check{T}} + \Delta \overset{n}{\tilde{T}} \quad \text{mit} \quad \Delta \overset{n}{\check{T}} = \int_{-h/2}^{h/2} (\check{T} - T_0) (\theta^3)^n d\theta^3 \quad \text{und} \quad \Delta \overset{n}{\tilde{T}} = \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{T} (\theta^3)^n d\theta^3. \quad (4.33)$$

Im Rahmen der hier formulierten thermoelastischen Schalentheorie ergibt sich so beispielsweise für die *konstitutiven Gleichungen der Momente* der folgende allgemeine Aufbau:

$$m^{\alpha\beta} = \check{m}^{\alpha\beta} \left(\check{\gamma}_{\rho\lambda}, \check{\kappa}_{\rho\lambda}, \Delta \overset{n}{\check{T}} \right) + \tilde{m}^{\alpha\beta} \left(\check{\gamma}_{\rho\lambda}, \check{\kappa}_{\rho\lambda}, \Delta \overset{n}{\tilde{T}} \right) \quad (4.34)$$

$$\text{mit} \quad \gamma_{\rho\lambda} = \check{\gamma}_{\rho\lambda} + \tilde{\gamma}_{\rho\lambda} \quad \text{und} \quad \kappa_{\rho\lambda} = \check{\kappa}_{\rho\lambda} + \tilde{\kappa}_{\rho\lambda}.$$

Mit (4.30) und (4.31) kann man die *quasistatischen Bewegungsgleichungen* von (3.15) abspalten. Das vektorielle Kräfte- und Momentengleichgewicht im quasistatischen Zustand der Mittelfläche liefert also:

$$\check{\mathbf{n}}_{,\alpha}^\alpha + \mathbf{p} \sqrt{a}^+ = 0 \quad ; \quad (\check{\mathbf{a}}_3 \times \check{\mathbf{m}}^\alpha)_{,\alpha} + \check{\mathbf{a}}_\alpha \times \check{\mathbf{n}}^\alpha = 0 \quad (4.35)$$

Hierdurch wird eine *Abfolge von statischen Gleichgewichtszuständen beschrieben*, die sich einstellen würden, wenn man unter Anpassung an die (inhomogenen) Randbedingungen und unter Vernachlässigung von Trägheitswirkungen die *äußeren mechanischen* (p^k) und *inneren thermischen Belastungen* ($\Delta \overset{n}{\check{T}}$) unendlich langsam auf die Schale aufbringen würde. Die Trägheitswirkungen \mathbf{K}_T und \mathbf{M}_T werden also den verbliebenen *dynamischen Bewegungsgleichungen* zugeordnet.

Setzt man $(4.27)_1$ in die gekoppelte Wärmeleitgleichung (3.66) ein, so kann man analog zur oben geschilderten Vorgehensweise die *quasistatische Wärmeleitgleichung*

$$\check{h}^k|_k = \check{\rho} h \quad (4.36)$$

abspalten, in der die Wärmequelle h vorgegeben ist. Terme mit zeitlichen Ableitungen werden wiederum dem *dynamischen Problem* zugeordnet, siehe (4.63).

Das *quasistatische Problem* im Gebiet wird also durch die Gleichungen (4.35) und (4.36) beschrieben. Da die Wärmeleitgleichung keine Kopplungsterme enthält, kann sie unabhängig von den quasistatischen Bewegungsgleichungen (vorab) gelöst werden. In

(4.35) gehen dann - wie schon bemerkt - über (4.33) und (4.34) die inneren thermischen Lasten ein. Dem *quasistatischen Problem* zugeordnet sind *inhomogene Randbedingungen*.

Das nach Abspaltung der quasistatischen Gleichungen (4.35/36) verbliebene *dynamische Problem* ist weiterhin gekoppelt. Da es - wie man in (4.52) erkennen kann - gelingt, die Querkräfte $\tilde{n}^{\alpha 3}(\theta^\alpha, t)$ zu eliminieren, verbleiben als *Feldvariablen des dynamischen Problems* die Verschiebungskomponenten $\tilde{v}^k(\theta^k, t)$ und die Temperaturen $\tilde{T}(\theta^k, t)$. Hierzu gehören die verbleibenden, *homogenen Randbedingungen*.

Von der quasistatischen Temperaturverteilung $\tilde{T} = \tilde{T}(\theta^k, t)$ fordern wir, dass sie - neben der Differenzialgleichung (4.36) im Gebiet - die für das jeweilige Schalentragerwerk vorgegebenen thermischen Randbedingungen an den Begrenzungsflächen erfüllt. In Anlehnung an Tabelle 4.1 wollen wir hier drei unterschiedliche Fälle vorsehen und erläutern, was im Folgenden unter homogenen bzw. inhomogenen (thermischen) Randbedingungen zu verstehen ist:

1. An den Begrenzungsflächen sind Temperaturen T vorgegeben. Diese *Temperaturrandbedingungen* müssen dann von der quasistatischen Lösung erfüllt werden: $\tilde{T} = T$ (*inhomogene Randbedingung*). Für den dynamischen Lösungsanteil verbleibt dann an den Begrenzungsflächen: $\tilde{T} = 0$ (*homogene Randbedingung*).
2. Ein ähnlicher Sachverhalt ergibt sich, wenn an den Begrenzungsflächen ein- bzw. ausströmende Wärmeströme vorgegeben sind. Ist beispielsweise an der oberen Laibungsfläche des Schalenkontinuums der einströmende Wärmestrom $q_{(o)}$ vorgegeben, so gilt gemäß (4.21)₁ die folgende *Wärmestromrandbedingung* für $\theta^3 = h/2$:

$$h^3 = -\lambda T_{,3} = q_{(o)} \quad \text{mit} \quad h^3 = \check{h}^3 + \tilde{h}^3 \quad \text{und} \quad T_{,3} = \check{T}_{,3} + \tilde{T}_{,3}. \quad (4.37)$$

Da die quasistatischen Lösungen die vorgegebenen thermischen Randbedingungen erfüllen sollen, folgt für das Beispiel *vorgegebener Wärmeströme an der oberen Laibungsfläche*

$$\text{als inhomogene RB:} \quad \check{h}^3 = -\lambda \check{T}_{,3} = q_{(o)} \quad (4.38)$$

$$\text{und als homogene RB:} \quad \tilde{h}^3 = -\lambda \tilde{T}_{,3} = 0.$$

Etwas komplizierter wird der Sachverhalt jedoch bei konvektivem Wärmeübergang.

3. Von *Konvektionsrandbedingungen* sprechen wir, wenn an den Begrenzungsflächen Umgebungstemperaturen $(T_\infty^o, T_\infty^u, T_\infty^s)$ und Wärmeübergangskoeffizienten $(\alpha^o, \alpha^u, \alpha^s)$ vorgegeben. Setzt man die Aufspaltung $T = \tilde{T} + \check{T}$ in die Konvektionsrandbedingungen in Tabelle 4.1 ein, so kann man die *quasistatischen*

Wärmeleitgleichungen am Rande abspalten. Diese lauten an der oberen und unteren Laibungsfläche ($\theta^3 = \pm h/2$) sowie am Rand s :

$$\lambda \tilde{T}_{,3} = -\alpha_{(o)}(\tilde{T} - T_{(o)}^\infty); \quad \lambda \tilde{T}_{,3} = \alpha_{(u)}(\tilde{T} - T_{(u)}^\infty); \quad \lambda \phi^\beta \tilde{T}_{,\beta} = -\alpha_{(s)}(\tilde{T} - T_{(s)}^\infty). \quad (4.39)$$

Dann verbleiben nur noch die dynamischen Anteile in Tabelle 4.1 (rechte Spalte) und es gelten die folgenden *homogenen Randbedingungen*:

$$\lambda \tilde{T}_{,3} + \alpha_{(o)} \tilde{T} = 0; \quad \lambda \tilde{T}_{,3} - \alpha_{(u)} \tilde{T} = 0; \quad \lambda \phi^\beta \tilde{T}_{,\beta} + \alpha_{(s)} \tilde{T} = 0. \quad (4.40)$$

In den hier behandelten Berechnungsbeispielen haben wir es immer mit Mischformen der genannten Fälle zu tun, so sind z.B. für den in Abschnitt 7.2 behandelten Zylinder die Wärmeströme an den Randflächen vorgegeben, während an den Laibungsflächen konvektiver Wärmeübergang vorliegt. In solchen Fällen müssen je nach Art der thermischen Randbedingungen die Fälle 1 bis 3 an den Begrenzungsflächen berücksichtigt, und die inhomogenen sowie homogenen Randbedingungen formuliert werden.

Wir kommen nun zu *mechanischen Randbedingungen*: Die Lösungen für $\check{v}^k = \check{v}^k(\theta^\alpha, t)$ müssen neben den quasistatischen Bewegungsgleichungen (4.35) Randbedingungen an den durch die Parameterlinie s beschriebenen Rändern der Mittelfläche erfüllen. Da die Vorgehensweise zur Formulierung der inhomogenen und der verbleibenden homogenen Randbedingungen prinzipiell immer die gleiche ist, soll hier nur noch beispielhaft auf den Fall *eingepprägter Kräfte am Schalenrand* eingegangen werden.

Setzt man in das *vektorielle Kräftegleichgewicht am Rande* (4.9)₁ die Aufspaltung (4.31)₂ ein, so erhält man:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} (\check{\mathbf{n}}^\alpha + \tilde{\mathbf{n}}^\alpha) \check{n}_\alpha = \mathbf{n}_{(e)} + \mathbf{n}_{(a)} \quad (4.41)$$

Da die eingepprägte Randlast $\mathbf{n}_{(e)}$ (Komponentenzerlegung: siehe (4.8)₁) als vorab bekannt gilt, ist sie den quasistatischen Gleichgewichtsbedingungen zuzuordnen. Die Auflagerreaktion $\mathbf{n}_{(a)}$ ist unbekannt und vom jeweiligen Momentanzustand abhängig, sie muss also auch aufgespalten werden: $\mathbf{n}_{(a)} = \check{\mathbf{n}}_{(a)} + \tilde{\mathbf{n}}_{(a)}$. Somit kann das *quasistatische Kräftegleichgewicht*

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \check{\mathbf{n}}^\alpha \check{n}_\alpha = \mathbf{n}_{(e)} + \check{\mathbf{n}}_{(a)} \quad (4.42)$$

von (4.41) abgespalten werden, und es verbleibt das *dynamische Kräftegleichgewicht*:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \tilde{\mathbf{n}}^\alpha \check{n}_\alpha = \tilde{\mathbf{n}}_{(a)}. \quad (4.43)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte am Rande sind hier in vektorieller Form angegeben. Diese können analog zu (4.10) auch in Komponentenschreibweise überführt werden. In den Komponenten der Auflagerreaktion $\mathbf{n}_{(a)}$ müssen dann ebenfalls quasistatische von dynamischen Anteilen abgespalten werden.

An einem *ungestützten Schalenrand* verschwindet $\mathbf{n}_{(a)}$, dann lassen sich aus den Kräftegleichgewichtsbedingungen die folgenden Randbedingungen ableiten:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \check{\mathbf{n}}^\alpha \check{n}_\alpha = \mathbf{n}_{(e)} \quad (\text{inhomogene RB}) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{a}} \tilde{\mathbf{n}}^\alpha \check{n}_\alpha = 0 \quad (\text{homogene RB}). \quad (4.44)$$

4.5 Lösung der dynamischen Bewegungsgleichungen mittels des Prinzips der virtuellen Verrückung

Unter dem Oberbegriff 'Prinzip-der-virtuellen-Verrückungen' (PvV) lassen sich gemäß [63] eine Reihe von Lösungsprinzipien der Mechanik zusammenfassen: Hierzu gehören das *Lagrange-D'Alembert-Prinzip* in der Kontinuumsmechanik, das *Prinzip der virtuellen Arbeit* in der Statik und das *Prinzip von D'Alembert* in der Starrkörpermechanik. All diesen Prinzipien ist die folgende Vorgehensweise gemein: In einem beliebigen Momentanzustand wird das jeweilige mechanische System einer *virtuellen* - infinitesimal kleinen - *Verrückung* unterworfen, die es in eine *virtuelle Nachbarlage* verschiebt²⁴. **Man fordert dann, dass die beim Übergang in die Nachbarlage am - und im - Gesamtsystem geleistete virtuelle Arbeit verschwindet, wenn es sich im Gleichgewicht befindet.** Für Anwendungen in der Statik muss dann gelten:

$$W^{virt} = 0. \quad (4.45)$$

Hierin bezeichnet W^{virt} die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte, als auch die virtuelle Formänderungsarbeit im Inneren des jeweiligen Gesamtsystems. Geht man nun von der 'Statik' zur 'Dynamik' über, so gelingt es - wie in Abschnitt 2.1.4 gezeigt - unter Einführung von Trägheitskräften im Inneren der Volumenelemente das *dynamische Kräftegleichgewicht* aufrecht zu erhalten. Man fügt dann zu (4.45) noch die virtuelle 'Arbeit' E^{virt} all dieser Trägheitskräfte hinzu, die sie auf ihren virtuellen Verschiebungswegen ($\mathbf{w}^{virt} = \delta \mathbf{w}$) leisten, so folgt das *Lagrange-D'Alembert-Prinzip*:

$$W^{virt} - \overbrace{\int_{(V)}^+ \rho \ddot{\mathbf{w}} \delta \mathbf{w} dV}^{E^{virt}} = 0. \quad (4.46)$$

Eine Anwendung des PvV auf die hier behandelten Schalentragwerke ist nun - wie auch in [12] gezeigt wird - auf zwei unterschiedlichen Wegen denkbar:

- Zum einen kann man ausgehend von (4.46) - also einer für das Schalenkontinuum gültigen Beziehung - das Lagrange-D'Alembert-Prinzip auf die Mittelfläche transformieren, wobei unter Beachtung der Normalenhypothese virtuelle Verschiebungen im Schalenraum auf die Mittelfläche bezogen werden:

$$\delta \mathbf{w}(\theta^k, t) = \delta \mathbf{v}(\theta^\alpha, t) + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \theta^3 \mathbf{a}_3. \quad (4.47)$$

In diesem Zusammenhang versteht man unter einer *virtuellen Verrückung der Mittelfläche* eine *virtuelle Verschiebung* $\delta \mathbf{v}(\theta^\alpha, t)$ (also eine *Variation* des Verschiebungsvektors \mathbf{v}) sowie eine *virtuelle Verdrehung* $\delta \boldsymbol{\varphi}(\theta^\alpha, t)$.

²⁴Die *virtuelle Nachbarlage* muss *geometrisch zulässig* sein, d.h., die jeweiligen *kinematischen Bindungen* des Systems müssen erfüllt werden, siehe auch [63], [5]; ansonsten ist sie beliebig.

- Zum anderen kann man die vektoriellen Bewegungsgleichungen der Schale (3.15) mit den ihnen zugeordneten Verrückungen²⁵ ($\delta \mathbf{v}$ bzw. $\delta \boldsymbol{\varphi}$) skalar multiplizieren, die so entstehenden Arbeitsausdrücke addieren, anschließend über die Mittelfläche integrieren und fordern, dass der auf das Globalsystem bezogene *Arbeitsausdruck* verschwinden muss, wenn sich das Schalentragswerk im dynamischen Gleichgewicht befindet, siehe (4.48).

Wie in [12] gezeigt wird, führen beide Wege auf ein und dieselbe *Arbeitsformulierung*:

$$\int_{(\bar{A})}^+ \left[\mathbf{n}_{,\alpha}^\alpha + \mathbf{p} \sqrt{\bar{a}} - \mathbf{K}_T \right] \delta \mathbf{v} d\theta^1 d\theta^2 + \int_{(\bar{A})}^+ \left[(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{m}^\alpha)_{,\alpha} + \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{n}^\alpha - \mathbf{a}_3 \times \mathbf{M}_T \right] \delta \boldsymbol{\varphi} d\theta^1 d\theta^2 = 0. \quad (4.48)$$

In Abschnitt 4.4 wird beschrieben, wie man ausgehend von den Aufspaltungen (4.26/28) alle weiteren den Momentanzustand der Schale beschreibenden Größen additiv in einen quasistatischen und einen dynamischen Anteil aufspalten kann. Von den quasistatischen (mechanischen) Größen wird gefordert, dass sie neben den Bewegungsgleichungen (4.35) im Gebiet die inhomogenen Randbedingungen, siehe Abschnitt 4.4.1, erfüllen.

Wie schon angemerkt, soll das *quasistatische Problem* vorab gelöst werden, sodass die den quasistatischen Zustand der Schale beschreibenden Größen - wie $\check{\mathbf{v}}$ - hier als bekannt vorausgesetzt werden können. Dann kann man für die virtuellen Verrückungen in (4.48) schreiben:

$$\delta \mathbf{v} = \underbrace{\delta \check{\mathbf{v}}}_{=0} + \delta \tilde{\mathbf{v}}; \quad \delta \boldsymbol{\varphi} = \underbrace{\delta \check{\boldsymbol{\varphi}}}_{=0} + \delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (4.49)$$

Wie auch in [12] beschrieben, können die Randbedingungen der Schale in der aus dem PvV resultierenden Arbeitsformulierung (4.48) durch Anwendung des *Stokesschen Integralsatzes* berücksichtigt werden; unter Beachtung der *vektoriellen Gleichgewichtsbedingungen am Schalenrand* (4.9) gilt:

$$\begin{aligned} \int_{(\bar{A})}^+ (\mathbf{n}^\alpha \delta \tilde{\mathbf{v}})_{,\alpha} d\theta^1 d\theta^2 &= \int_{(s)} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{\bar{a}}} \mathbf{n}^\alpha \bar{n}_\alpha}^{\mathbf{n}_{(e)} + \mathbf{n}_{(a)}} \delta \tilde{\mathbf{v}} ds \\ \int_{(\bar{A})}^+ [(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{m}^\alpha) \delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}]_{,\alpha} d\theta^1 d\theta^2 &= \int_{(s)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\bar{a}}} (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{m}^\alpha) \bar{n}_\alpha}_{\mathbf{m}_{(e)} + \mathbf{m}_{(a)}} \delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}} ds. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Nach Abspaltung der *für sich* erfüllten Gleichgewichtsbedingungen des quasistatischen Zustandes (4.35) und der hierzu gehörenden Gleichgewichtsbedingungen am Rande²⁶

²⁵Die Verrückungen $\delta \mathbf{v}$ und $\delta \boldsymbol{\varphi}$ sind *virtuelle Vektorfelder*, die sowohl vom Ort θ^α , als auch von der Zeit t abhängen.

²⁶Exemplarische wird in Abschnitt 4.4.1 das dem *quasistatischen Problem* zugeordnete *vektorielle Kräftegleichgewicht am Rande* entwickelt, siehe (4.42).

kann man die Arbeitsformulierung (4.48) mit (4.50) auf die folgende Form bringen²⁷:

$$\boxed{\tilde{W}_G^{virt} + \tilde{W}_R^{virt} + \tilde{E}^{virt} = 0 .} \quad (4.51)$$

Da man wegen (4.49) die Verrückungen als *Variationen dynamischer Verformungsgrößen* interpretieren kann und das *quasistatische Problem* abgespalten wird, markieren wir im Folgenden die Arbeitsanteile - siehe z.B. (4.51) - mit einer aufgesetzten Schlange. Hierin bezeichnet \tilde{W}_G^{virt} die virtuelle Arbeit, die die Schnittreaktionen auf ihren Verschiebungswegen im Gebiet leisten:

$$\tilde{W}_G^{virt} = \underbrace{\int_{(\overset{+}{A})} \tilde{s}^{\alpha\beta} \delta \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} d\overset{+}{A} + \int_{(\overset{+}{A})} \tilde{m}^{\alpha\beta} \delta \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} d\overset{+}{A} + \int_{(\overset{+}{A})} \tilde{s}^{\alpha\beta} \delta \Delta \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} d\overset{+}{A} + \int_{(\overset{+}{A})} \tilde{n}^{\alpha\beta} \delta \Delta \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} d\overset{+}{A} + \int_{(\overset{+}{A})} \tilde{m}^{\alpha\beta} \delta \Delta \tilde{\rho}_{\alpha\beta} d\overset{+}{A}}_{(4.52)}$$

Als Folge der hier formulierten *geometrisch nichtlinearen Schalentheorie* gehen über die unterstrichenen Anteile in die Arbeitsformulierung (4.51) auch noch Schnittgrößen des quasistatischen Zustandes ein. Über die jeweiligen Arbeitsanteile werden diesen Schnittgrößen (virtuelle) Verschiebungsgrößen zugeordnet, die sich folgendermaßen berechnen:

$$\Delta \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \tilde{v}^k|_{\alpha} \tilde{v}^n|_{\beta} \overset{+}{a}_{kn} ; \quad \Delta \tilde{\gamma}_{\alpha} = \tilde{v}^k|_{\alpha} \tilde{\Phi}_3^n \overset{+}{a}_{kn} ; \quad \Delta \tilde{\rho}_{\alpha\beta} = \tilde{\kappa}_{\alpha\gamma} \tilde{v}^{\lambda}|_{\rho} \overset{+}{a}_{\lambda\beta} \overset{+}{a}^{\gamma\rho} . \quad (4.53)$$

\tilde{E}^{virt} bezeichnet die virtuelle 'Arbeit', die die Trägheitsgrößen auf ihren virtuellen Verschiebungswegen leisten:

$$\tilde{E}^{virt} = \int_{(\overset{+}{A})} K_T^k \overset{+}{a}_{ki} \delta \tilde{v}^i d\overset{+}{A} + \dots \quad \text{mit} \quad K_T^k = \overset{+}{m} \overset{\bullet\bullet}{\tilde{v}}^k + \overset{+}{m} \overset{\bullet\bullet}{\tilde{v}}^k + \dots \quad (4.54)$$

Da sowohl Einflüsse aus Drehträgheit als auch die Terme mit $\overset{+}{s}$ in K_T^k , siehe (B.25), bei dünnen Schalentragwerken nur eine untergeordnete Rolle spielen, werden diese in (4.54) und im Folgenden vernachlässigt.

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen verbleibt als *virtuelle Arbeit der Randlasten* lediglich ein Beitrag mit eingepprägten Randmomenten:

$$\tilde{W}_R^{virt} = \int_{(s)} \left(\mathbf{m}_{(e)} \cdot \check{\mathbf{a}}_{\alpha} \right) \tilde{c}_{\beta}^{\alpha} \delta \tilde{\varphi}^{\beta} ds \quad (4.55)$$

$$\text{mit} \quad \delta \tilde{\varphi}^{\beta} = \epsilon^{\beta\alpha} \mathbf{a}_3 \cdot \delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha} ; \quad \tilde{c}_{\beta}^{\alpha} = (\tilde{\mathbf{a}}_3 \cdot \check{\mathbf{a}}^3) \delta_{\beta}^{\alpha} + \check{\epsilon}^{\rho\alpha} [\check{\mathbf{a}}_{\rho} \cdot (\tilde{\mathbf{a}}_{\beta} \times \tilde{\mathbf{a}}_3)] .$$

Die Arbeit, die die äußeren Flächenlasten p^k auf ihren virtuellen Verschiebungswegen leisten, ist in (4.51) nicht mehr enthalten, da sie mit Abspaltung des quasistatischen Problems verschwindet.

²⁷Hierzu sind aufwendige Umformungen in den Gleichungen notwendig, die in [12] ausführlicher beschrieben werden. Unter Beachtung von Analogien kann man jedoch große Teile der in [12] hergeleiteten Beziehungen hier weiterverwenden.

Um die sich einstellende (dynamische) Gleichgewichtslage der Schale berechnen zu können, machen wir für die unbekannten Komponenten des dynamischen Verschiebungsvektors $\tilde{v}^k(\theta^\alpha, t)$ *Seperationsansätze*:

$$\tilde{v}^r(\theta^\alpha, t) = \sum_n \left[\overset{n}{v}^r(\theta^\alpha) \overset{n}{h}(t) \right] \Rightarrow \delta \tilde{v}^r(\theta^\alpha, t) = \sum_k \left[\overset{k}{v}^r(\theta^\alpha) \delta \overset{k}{h}(t) \right]. \quad (4.56)$$

Für die Ortsfunktionen $\overset{n}{v}^r(\theta^\alpha)$ - die wir in (4.56) als bekannt voraussetzen - wollen wir die *Eigenschwingformen* der zu untersuchenden Schale verwenden, da sie die geforderten homogenen Randbedingungen erfüllen. Ein weiterer Vorteil bei der Verwendung von Eigenschwingformen ist die Möglichkeit zur Ausnutzung von Orthogonalitätsbedingungen, mit denen eine deutliche Reduktion des zu betreibenden Aufwandes bei numerischen Berechnungen gelingt. Die Formulierung der *Orthogonalitätsbedingungen für Eigenschwingformen* gelingt auf ähnlichem Wege wie für Temperatureigenformen, siehe Abschnitt 4.6. Eine ausführliche Herleitungen dieser Orthogonalitätsbedingungen findet sich in [26]. Gemäß [12] muss dann gelten:

$$\int_{(\overset{+}{A})} \left[\overset{n}{s}_{(L)}^{\alpha\beta} \overset{k}{\gamma}_{\alpha\beta} + \overset{n}{m}_{(L)}^{\alpha\beta} \overset{k}{\kappa}_{\alpha\beta} \right] d\overset{+}{A} = \overset{n}{X} = 0 \quad \text{und} \quad \int_{(\overset{+}{A})} \overset{n}{m} \overset{n}{v}^s \overset{k}{v}^i \overset{+}{a}_{si} d\overset{+}{A} = \overset{n}{Y} = 0 \quad \text{für} \quad n \neq k. \quad (4.57)$$

Hierin bezeichnen die mit einem tiefgestellten ' (L) ' gekennzeichneten Größen die zur n -ten bzw. k -ten Eigenschwingform gehörenden konstitutiven Variablen und Schnittreaktionen²⁸ der Mittelfläche, die lediglich lineare Beiträge in $\overset{n}{v}^i$ enthalten. So gilt beispielhaft gemäß (3.31/33), (3.37) und (B.21)₂:

$$\overset{n}{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\overset{n}{v}^\pi|_\beta \overset{+}{a}_{\alpha\pi} + \overset{n}{v}^\pi|_\alpha \overset{+}{a}_{\beta\pi} \right); \quad \overset{n}{s}_{(L)}^{\rho\lambda} = D G^{\rho\lambda\epsilon\gamma} \overset{n}{\gamma}_{\epsilon\gamma} \quad (1.\text{Approximation}). \quad (4.58)$$

Verwendet man Eigenschwingformen, die mit einem kommerziellen Finite-Element-Programmsystem²⁹ berechnet werden, so erhält man üblicherweise *orthonormierte Eigenformen*. Dann gilt für die verbleibenden Diagonalelemente der Matrizen $\overset{n}{X}$ und $\overset{n}{Y}$ in (4.57):

$$\overset{n}{Y} = 1 \Rightarrow \overset{n}{X} = \left(\overset{n}{\omega} \right)^2 \quad (\overset{n}{\omega} : \text{Eigenkreisfrequenz der } n\text{-ten Schwingform}). \quad (4.59)$$

Zur Lösung der Bewegungsgleichungen baut man nun unter Beachtung der konstitutiven Gleichungen, siehe Abschnitt 3.3, die Seperationsansätze (4.56) in die Arbeitsformulierung (4.51) ein. Diese kann dann auf die folgende Form gebracht werden:

$$\sum_k \left[\overset{k}{\tilde{W}}_G + \overset{k}{\tilde{W}}_R + \overset{k}{\tilde{E}} \right] \delta \overset{k}{h} = 0 \quad (4.60)$$

²⁸Temperaturabhängige Anteile sind $\overset{n}{s}_{(L)}^{\alpha\beta}$ und $\overset{n}{m}_{(L)}^{\alpha\beta}$ nicht enthalten!

²⁹Wir verwenden *MSC/NASTRAN (Structural Analysis)*.

Da die in (4.60) enthaltenen *Variationen der Zeitfunktionen* $\delta h^k(t)$ beliebig und voneinander unabhängig sind, fordert man:

$$\boxed{\tilde{W}_G^k + \tilde{W}_R^k + \tilde{E}^k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, k_{max})}. \quad (4.61)$$

Die Genauigkeit der erzielten Ergebnisse hängt dann maßgeblich von der Zahl k_{max} (Anzahl der mitgenommenen Eigenschwingformen) ab.

Wie in (4.34)₁ beispielhaft für die Momente $\tilde{m}^{\alpha\beta}$ veranschaulicht, gehen in die dynamischen Schnittreaktionen und damit in die aus dem PvV entwickelten Arbeitsformulierungen die *thermischen Variablen* $\Delta \tilde{T}^n$ über *konstitutive Beziehungen* ein. Gemäß (4.33)₃ berechnen sich diese Variablen durch Integration über die *dynamische Temperaturverteilung* \tilde{T} im Schalenraum. Da diese bei der Behandlung des gekoppelten dynamischen Problems eine unbekannte Größe (Feldvariable) bezeichnet, müssen für \tilde{T} - wie in (4.65)₁ gezeigt wird - ebenfalls Separationsansätze mit unbekannten Zeitfunktionen $f^l(t)$ formuliert werden. Die *thermische konstitutive Variable* $\Delta \tilde{T}^n$ berechnet sich dann folgendermaßen:

$$\Delta \tilde{T}^n = \int_{-h/2}^{h/2} \underbrace{\sum_l \left[T^l(\theta^r) f^l(t) \right]}_{\tilde{T}} (\theta^3)^n d\theta^3. \quad (4.62)$$

In die Arbeitsformulierungen (4.51) bzw. (4.61) gehen somit neben den Unbekannten $\tilde{h}^k(t)$ auch die den Temperatureigenformen $\tilde{T}^l(\theta^r)$ zugeordneten Unbekannten $f^l(t)$ ein.³⁰ Dieser Sachverhalt gilt natürlich nur im Rahmen einer gekoppelten Analyse.

Auf Unterschiede bei der Berechnung, wie sie sich im Rahmen einer *entkoppelten Analyse* ergeben, wird am Ende von Abschnitt 3.4 eingegangen. Dann können - wie bemerkt - die Temperaturfelder $T(\theta^k, t)$ bzw. $\tilde{T}(\theta^k, t)$ vorab bestimmt werden. Was dazu führt, dass die Größen $\Delta \tilde{T}^n$ als vorab bekannte, *innere thermische Belastungen* der Schale auftreten. Unbekannte Zeitfunktionen $f^l(t)$ gehen dann natürlich nicht mehr in die Arbeitsformulierungen ein.

4.6 Lösung der dynamischen Wärmeleitgleichung

Der übergeordnete Weg bei der Lösung der gekoppelten dynamischen Wärmeleitgleichung ist vergleichbar mit der Vorgehensweise im vorangegangenen Abschnitt. Separationsansätze mit bekannten Eigenformen und unbekannten Zeitfunktionen werden in eine Integralgleichung, die aus der Differenzialgleichung der Wärmeleitung entwickelt wird, eingesetzt. Wir integrieren hier aber nicht über die

³⁰So liefert die Auswertung von (4.61) bei der Platte in Berechnungsbeispiel 1 die Gleichung (7.11)₂, in der die Unbekannten $\tilde{h}^k(t)$ und $f^l(t)$ enthalten sind.

Mittelfläche, sondern über das gesamte Schalenkontinuum. Dann wird - ähnlich wie beim PvV - gefordert, dass die dynamische Wärmeleitgleichung 'im Mittel' mit den jeweiligen Separationsansätzen erfüllt wird³¹. Auf die Berechnung von Temperatureigenformen wird hier ganz besonders detailliert eingegangen. Diese erfüllen die homogene entkoppelte Wärmeleitgleichung, als auch die homogenen thermischen Randbedingungen. Die Existenz von Orthogonalitätsbedingungen wird für unterschiedliche Arten von thermischen Randbedingungen nachgewiesen, wo hier - anders als in [26] - auch der Fall vorgegebener Konvektionsrandbedingungen berücksichtigt wird.

Nach Abspaltung der quasistatischen Wärmeleitgleichung (4.36) von (3.68) verbleibt die *dynamische Wärmeleitgleichung*

$$\tilde{h}^k|_k + \overset{+}{\rho}c\overset{\bullet}{\tilde{T}} + \underbrace{\gamma^* (\tilde{T} + \tilde{T}) \left(\overset{\bullet}{\gamma}_\alpha^\alpha + \theta^3 \overset{\bullet}{\kappa}_\beta^\alpha \overset{+}{\nu}_\alpha^\beta \right)}_{\text{Kopplungsterm}} = -\overset{+}{\rho}c\overset{\bullet}{\tilde{T}}, \quad (4.63)$$

die den Kopplungsterm enthält. Die *rechte Seite* $(-\overset{+}{\rho}c\overset{\bullet}{\tilde{T}})$ der Differenzialgleichung kann als vorgegebene 'Belastung' angesehen werden, weil \tilde{T} vorab aus der quasistatischen Wärmeleitgleichung unter Anpassung an die inhomogenen Randbedingungen berechnet wird, siehe Abschnitt 4.4. Die *quasistatische Temperaturverteilung* in dem jeweiligen Schalenkontinuum sei in der Form

$$\tilde{T}(\theta^r, t) = T_0 + \tilde{T}(\theta^r)g(t) \quad (4.64)$$

angebbbar.

Für die verbliebene Unbekannte \tilde{T} (die dynamische Temperaturverteilung) wollen wir die folgenden *Separationsansätze* machen. Unter Beachtung von (4.27)₃ gilt also:

$$\tilde{T}(\theta^r, t) = \sum_l \left[\overset{l}{T}(\theta^r) \overset{l}{f}(t) \right] \Rightarrow \tilde{h}^k(\theta^r, t) = \sum_l \left[\underbrace{-\lambda \overset{+}{g}^{km} \overset{l}{T}_{,m}(\theta^r)}_{\overset{l}{h}^k(\theta^r)} \overset{l}{f}(t) \right] \quad (4.65)$$

Für die ortsabhängigen Größen $\overset{l}{T}(\theta^r)$ werden wir die *Temperatureigenformen* verwenden. Diese sind Lösungen der *homogenen entkoppelten Wärmeleitgleichung*, die sich aus (4.63) nach Streichen des Kopplungsterms und der rechten Seite ergibt. Ohne Einsatz der kovarianten Ableitung (2.90) und mit den Stoffgesetzen für die dynamischen Wärmeströme (4.27)₃ (es gilt $\overset{+}{g}^{\alpha 3} = 0$ und $\overset{+}{g}^{33} = 1$) lautet sie:

$$-\left(\lambda \overset{+}{g}^{\alpha\beta} \tilde{T}_{,\beta} \sqrt{\overset{+}{g}} \right)_{,\alpha} - \left(\lambda \tilde{T}_{,3} \sqrt{\overset{+}{g}} \right)_{,3} + \overset{+}{\rho}c\overset{\bullet}{\tilde{T}} \sqrt{\overset{+}{g}} = 0. \quad (4.66)$$

Als Unbekannte verbleibt die zeit- und ortsabhängige Temperaturverteilung $\tilde{T}(\theta^r, t)$, für die man aufgrund der Homogenität der Differenzialgleichung den folgenden Ansatz machen kann:

$$\tilde{T}(\theta^r, t) = T(\theta^r)e^{\varphi t}. \quad (4.67)$$

³¹In der Mathematik spricht man in diesem Zusammenhang von einer *schwachen Formulierung*.

In diesem Zusammenhang wird die ortsabhängige Größe $T(\theta^r)$ als *Eigenform - Temperatureigenform* - und die dazugehörige skalare Größe φ als *Eigenwert* bezeichnet. Im Rahmen einer Näherung soll hier die dreidimensionale Eigenform $T(\theta^r)$ multiplikativ in eine zweidimensionale Größe $\vartheta(\theta^\alpha)$ und eine eindimensionale Größe $\tau(\theta^3)$ aufgespalten werden:

$$T(\theta^r) = \vartheta(\theta^\alpha)\tau(\theta^3). \quad (4.68)$$

Die Feldgröße $\vartheta(\theta^\alpha)$ ist interpretierbar als *Temperatureigenform der Mittelfläche*, wohingegen $\tau(\theta^3)$ von der Koordinate θ^3 abhängt und somit als *Temperatureigenform in Dickenrichtung* gedeutet werden kann. Setzt man (4.67) mit (4.68) in (4.66) ein, so muss gelten:

$$e^{\varphi t} \underbrace{\left[\tau \left(\lambda \overset{+}{g}{}^{\alpha\beta} \vartheta_{,\beta} \sqrt{\overset{+}{g}} \right)_{,\alpha} + \vartheta \left(\lambda \tau_{,3} \sqrt{\overset{+}{g}} \right)_{,3} - \varphi \overset{+}{\rho} c \vartheta \tau \sqrt{\overset{+}{g}} \right]}_{=0} = 0, \quad (4.69)$$

was nur erfüllt wird, wenn der unterklammerte Ausdruck verschwindet.

Die verbleibende zeitunabhängige Differenzialgleichung (in eckigen Klammern) kann nun auf die Form

$$\underbrace{\tau \left[\varphi \overset{+}{\rho} c \vartheta \sqrt{\overset{+}{g}} - \left(\lambda \overset{+}{g}{}^{\alpha\beta} \vartheta_{,\beta} \sqrt{\overset{+}{g}} \right)_{,\alpha} \right]}_{= F(\vartheta, \vartheta_{,\alpha}, \vartheta_{,\alpha\beta})} - \underbrace{\vartheta \left(\lambda \tau_{,3} \sqrt{\overset{+}{g}} \right)_{,3}}_{= G(\tau_{,3}, \tau_{,33})} = 0 \quad (4.70)$$

gebracht werden. Durch Umformung ergibt sich hieraus die Gleichung

$$\frac{F(\vartheta, \vartheta_{,\alpha}, \vartheta_{,\alpha\beta})}{\vartheta} = \frac{G(\tau_{,3}, \tau_{,33})}{\tau} = \Lambda, \quad (4.71)$$

die - bei variablen und voneinander unabhängigen Temperaturfeldern $\vartheta(\theta^\alpha)$ und $\tau(\theta^3)$ - nur für $\Lambda = \text{konst.}$ allgemein erfüllt werden kann. $T(\theta^r) = \vartheta(\theta^\alpha)\tau(\theta^3)$ ist also genau dann eine *Eigenform* der homogenen Differenzialgleichung (4.66), wenn ihre ein- und zweidimensionalen Anteile $\tau(\theta^3)$ und $\vartheta(\theta^\alpha)$ die ihnen zugeordneten Differtialgleichungen

$$\left(\lambda \overset{+}{g}{}^{\alpha\beta} \vartheta_{,\beta} \sqrt{\overset{+}{g}} \right)_{,\alpha} + \vartheta \left(\Lambda - \varphi \overset{+}{\rho} c \sqrt{\overset{+}{g}} \right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\lambda \tau_{,3} \sqrt{\overset{+}{g}} \right)_{,3} - \tau \Lambda = 0 \quad (4.72)$$

erfüllen.

Da wir Temperatureigenformen als Ansatzfunktionen zur Lösung der gekoppelten dynamischen Wärmeleitgleichung verwenden wollen, müssen sie auch die dem dynamischen Problem zugeordneten homogenen Randbedingungen erfüllen, siehe Abschnitt 4.4.1. In diesem Sinne müssen also die beiden homogenen Differenzialgleichungen in (4.72) unter Anpassung an die jeweiligen homogenen thermischen Randbedingungen gelöst werden, wobei an dieser Stelle darauf hingewiesen sei, dass mit der *multiplikativen Verknüpfung* der Eigenformen in (4.68) bestimmte thermische Randbedingungen nicht mehr realisiert werden können³².

³²Wie sich zeigen lässt, treten solche Probleme z.B. bei *nicht-konstanten Wärmeübergangskoeffizienten* $\alpha_{(o)}(\theta^\alpha)$ bzw. $\alpha_{(u)}(\theta^\alpha)$ an den Laibungsflächen der Schale auf. Dann lautet z.B. oben die entsprechende homogene Randbedingung gemäß (4.39)₁: $\lambda \tilde{T}_{,3} = \alpha_{(o)}(\theta^\alpha) \tilde{T}$; mit (4.68) ergäbe sich: $\tau_{,3} = \alpha_{(o)}(\theta^\alpha) \tau$, was zu unzulässigen Eigenformen $\tau(\theta^3, \theta^\alpha)$ führen würde.

Die Lösungen³³ der beiden homogenen Differenzialgleichungen in (4.72) werden im Folgenden als bekannt vorausgesetzt:

$$\vartheta^n(\theta^\rho) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{und} \quad \tau^m(\theta^3) \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (4.73)$$

Unter Beachtung von (4.67) und (4.68) können dann diejenigen dynamischen Temperaturfelder bestimmt werden, die die homogene Wärmeleitgleichung (4.66) erfüllen:

$$\tilde{T}(\theta^r, t) = \underbrace{\vartheta^n(\theta^\rho) \tau^m(\theta^3)}_{= T^{nm}(\theta^r)} e^{\varphi^l t} = T^l(\theta^r) e^{\varphi^l t}. \quad (4.74)$$

Um eine einfache Handhabung zu gewährleisten, werden die beiden Indizes n ($n = 1, 2, \dots, n_{max}$) und m ($m = 1, 2, \dots, m_{max}$) in T^{nm} durch einen einzigen Index l ersetzt. Der den *dreidimensionalen Temperatureigenformen* $T^l(\theta^k)$ in (4.74) aufgesetzte Index l kann dann z.B. nach der folgenden Vorschrift berechnet werden:

$$l = (n - 1)m_{max} + m. \quad (4.75)$$

Die zu erwartende Genauigkeit bei der Berechnung der sich einstellenden Temperaturfelder hängt natürlich maßgeblich von der Gesamtzahl ($l_{max} = n_{max} m_{max}$) der mitgenommenen Temperatureigenformen ab: Je mehr Eigenformen mitgenommen werden, desto 'besser' werden die erzielten Ergebnisse sein.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass man bei gewissen thermischen Randbedingungen die Temperaturverteilung $\vartheta(\theta^\alpha)$ in der Mittelfläche schon vorab abschätzen kann. Ist sie also vorab bekannt - wie in Berechnungsbeispiel 3 -, so lautet die Entwicklungsgleichung für die dreidimensionalen Temperatureigenformen $T^m(\theta^k) = \vartheta(\theta^\alpha) \tau^m(\theta^3)$ und die Zahl ($l = m_{max}$) der benötigten Eigenformen reduziert sich erheblich.

Setzt man nun (4.74) in die homogene Differenzialgleichung (4.66) ein, so kann man diese unter Verwendung der kovarianten Ableitung auf die folgende Form bringen:

$$h^l{}_k|_k + \varphi^l \rho c T^l = 0. \quad (4.76)$$

$h^l{}_k$ bezeichnet hierin die der l -ten Temperatureigenform zugeordneten Wärmeströme, siehe (4.65)₂.

Im Folgenden sollen aus (4.76) und unter Beachtung unterschiedlicher thermischer Randbedingungen die *Orthogonalitätsbedingungen für Temperatureigenformen* hergeleitet werden: Hierzu bedienen wir uns der *Produktenregel* (bei Differenziation). So kann nachgewiesen werden, dass für die kovariante Ableitung von $T^l h^k$ gilt:

$$\left(T^l h^k \right)|_k = T^l{}_{,k} h^k + T^l h^k|_k \quad (4.77)$$

³³Siehe Anhang C und D.

Integriert man nun die Terme in (4.77) über das Volumen $\overset{+}{V}$ des unverformten Schalenkontinuums - überführt man also (4.77) in eine *globale Formulierung* -, so ergibt sich:

$$\underbrace{\int_{(\overset{+}{V})} \left(\overset{r}{T} \overset{l}{h}^k \right) |_k d\overset{+}{V}}_{(\overset{+}{V})} = \int_{(\overset{+}{V})} \overset{r}{T}_{,k} \overset{l}{h}^k d\overset{+}{V} + \int_{(\overset{+}{V})} \overset{r}{T} \overset{l}{h}^k |_k d\overset{+}{V}. \quad (4.78)$$

Da der unterstrichene Ausdruck gemäß dem *Gaußschen Integralsatz*³⁴ durch eine Oberflächenintegration ersetzt werden kann, kann man auch schreiben:

$$\int_{(\overset{+}{A}^*)} \overset{r}{T} \overset{l}{h}^k \overset{+}{N}_k d\overset{+}{A}^* = \int_{(\overset{+}{V})} \overset{r}{T}_{,k} \overset{l}{h}^k d\overset{+}{V} + \int_{(\overset{+}{V})} \overset{r}{T} \overset{l}{h}^k |_k d\overset{+}{V}. \quad (4.79)$$

$\overset{+}{A}^*$ bezeichnet hier die 'physikalische' - also die tatsächliche - Oberfläche des gesamten Schalenkontinuums im Ausgangszustand. $\overset{+}{N}^k$ sind dann die Komponenten des jeweiligen Normaleneinheitsvektors $\overset{+}{\mathbf{N}} = \overset{+}{N}_k \overset{+}{\mathbf{g}}^k$, der in jedem Punkt der Oberfläche senkrecht auf dieser steht. Im Rahmen der hier formulierten Schalentheorie sollen für den Normaleneinheitsvektor $\overset{+}{\mathbf{N}}$ und seine Komponenten die folgenden Besonderheiten gelten:

- An den *Laibungsflächen* des Schalenkontinuums, siehe Abbildung 4.5, zeigt $\overset{+}{\mathbf{N}}$ in Richtung - bzw. entgegen der Richtung - von $\overset{+}{\mathbf{g}}^3$.
Dann gilt an der oberen Laibungsfläche ($\theta^3 = h/2$): $\overset{+}{N}^\alpha = 0$ und $\overset{+}{N}^3 = 1$.
Und an der unteren Laibungsfläche ($\theta^3 = -h/2$): $\overset{+}{N}^\alpha = 0$ und $\overset{+}{N}^3 = -1$.
- An den *Randflächen* entlang der Parameterlinie s , siehe Abbildung 4.6, hat $\overset{+}{\mathbf{N}}$ keine Komponente in Richtung von $\overset{+}{\mathbf{g}}^3$. Dann gilt: $\overset{+}{N}^3 = 0$.

Somit kann das Oberflächenintegral in (4.79) in drei Bereichsintegrale aufgespalten werden, die jeweils die Integrationen an der oberen und unteren Laibungsfläche, sowie an den Randflächen beschreiben. Unter Beachtung von (4.65)₂ gilt dann³⁵:

$$\int_{(\overset{+}{A}^*)} \overset{r}{T} \overset{l}{h}^k \overset{+}{N}_k d\overset{+}{A}^* = - \underbrace{\int \lambda \overset{r}{T} \overset{l}{T}_{,3} d\overset{+}{A}_3}_{\text{obere Laib.-fläche}} + \underbrace{\int \lambda \overset{r}{T} \overset{l}{T}_{,3} d\overset{+}{A}_3}_{\text{untere Laib.-fläche}} - \underbrace{\int \int \lambda \overset{r}{T} \overset{+}{g}^{\alpha\beta} \overset{l}{T}_{,\beta} \overset{+}{N}_\alpha \kappa ds d\theta^3}_{\text{Randflächen}} \quad (4.80)$$

Die Randintegrale in (4.80) müssen hier je nach Art der homogenen (thermischen) Randbedingungen bestimmt werden. In Anlehnung an die Fallunterscheidung in Abschnitt 4.4.1 sollen auch hier die gleichen drei Fälle untersucht werden:

1. Von *Temperaturrandbedingungen* sprechen wir, wenn an den Rändern Temperaturen vorgegeben sind. Die homogene Randbedingung $\tilde{T} = 0$ wird erfüllt, wenn auch für die Eigenformen

$$\overset{l}{T} = 0 \quad (4.81)$$

an den Begrenzungsflächen des Schalenkontinuums gilt. In diesem Fall verschwinden also die Randintegrale in (4.80).

³⁴Allgemein gilt: $\int_V a^k |_k dV = \int_A a^k N_k dA$. Siehe hierzu auch [63].

³⁵Zur Berechnung von κ siehe Fußnote 17 auf Seite 109.

2. Bei *Wärmestromrandbedingungen* sind an den Begrenzungsflächen die Wärmeströme vorgegeben. Dann ergibt sich ein ähnlicher Sachverhalt wie unter Punkt 1. In Abschnitt 4.4.1 wurde exemplarisch der Fall *vorgegebener Wärmeströme an der oberen Laibungsfläche* behandelt. Die homogene Randbedingung $\tilde{h}^3 = -\lambda \tilde{T}_{,3} = 0$ wird erfüllt, wenn für alle Temperatureigenformen an der Stelle $\theta^3 = h/2$ gilt:

$$-\lambda \overset{l}{T}_{,3} = 0. \quad (4.82)$$

Das Randintegral der oberen Laibungsfläche in (4.80) verschwindet dann. Verallgemeinert man diese Erkenntnis³⁶, so bedeutet dies: Bei Wärmestromrandbedingungen ergeben sich - wie auch bei Temperaturrandbedingungen - die zugeordneten Randintegrale in (4.80) zu Null.

3. Bei *Konvektionsrandbedingungen* muss die dynamische Temperaturverteilung \tilde{T} die in (4.40) formulierten homogenen Randbedingungen erfüllen. Diese Differentialgleichungen werden allgemein erfüllt, wenn man Eigenformen $\overset{l}{T}(\theta^k)$ verwendet, für die an den Begrenzungsflächen

$$-\lambda \overset{l}{T}_{,3} = \alpha_{(o)} \overset{l}{T}, \quad \lambda \overset{l}{T}_{,3} = \alpha_{(u)} \overset{l}{T} \quad \text{und} \quad -\lambda \phi^{\alpha} \overset{l}{T}_{,\beta} \overset{+}{n}_{\alpha} = \alpha_{(s)} \overset{l}{T} \quad (4.83)$$

gilt. Die Randintegration in (4.80), die wir im Folgenden mit der Größe $\overset{r}{I}^l$ bezeichnen, ergibt sich dann - nach längerer Rechnung - zu

$$\overset{r}{I}^l = \int_{(\overset{+}{A}^*)} \overset{r}{T} \overset{l}{h}^k \overset{+}{N}_k d\overset{+}{A}^* = \int \alpha_{(o)} \overset{r}{T} \overset{l}{T} d\overset{+}{A}_3 + \int \alpha_{(u)} \overset{r}{T} \overset{l}{T} d\overset{+}{A}_3 + \int \alpha_{(s)} \overset{r}{T} \overset{l}{T} \kappa ds d\theta^3. \quad (4.84)$$

Wie wir gesehen haben, braucht die Größe $\overset{r}{I}^l$ lediglich in Verbindung mit Konvektionsrandbedingungen in der Rechnung mitgenommen zu werden. Bei vorgegebenen Temperatur- bzw. Wärmestromrandbedingungen folgt hingegen aus den homogenen Randbedingungen: $\overset{r}{I}^l = 0$. Da (4.84) eine bezüglich der Indizes r und l symmetrische Formulierung darstellt, können in $\overset{r}{I}^l$ allgemein diese Indizes vertauscht werden, was im Nachfolgenden - bei der Formulierung der Orthogonalitätsbedingungen - zu beachten ist.

Nach Einsetzen der homogenen Wärmeleitgleichung (4.76)₁ ($\overset{l}{h}^k|_k = -\overset{l}{\varphi} \overset{+}{\rho} c \overset{l}{T}$) kann man nun (4.79) weiter umformen, sodass gilt:

$$\int_{(\overset{+}{V})} \lambda \overset{r}{T}_{,k} \overset{+}{g}^{km} \overset{l}{T}_{,m} d\overset{+}{V} + \overset{l}{\varphi} \int_{(\overset{+}{V})} \overset{+}{\rho} c \overset{l}{T} \overset{r}{T} d\overset{+}{V} = -\overset{r}{I}^l. \quad (4.85)$$

Zur Herleitung der für die numerische Lösung der Wärmeleitgleichung besonders wichtigen Orthogonalitätsbedingungen schreiben wir nun (4.85) mit vertauschten Indizes r und l an:

$$\int_{(\overset{+}{V})} \lambda \overset{l}{T}_{,k} \overset{+}{g}^{km} \overset{r}{T}_{,m} d\overset{+}{V} + \overset{r}{\varphi} \int_{(\overset{+}{V})} \overset{+}{\rho} c \overset{l}{T} \overset{r}{T} d\overset{+}{V} = -\overset{l}{I}^r. \quad (4.86)$$

³⁶Siehe auch [26].

Subtrahiert man nun (4.85) von (4.86), so verbleibt aufgrund von Symmetriebedingungen:

$$\left(\overset{r}{\varphi} - \overset{l}{\varphi}\right) \int_{(\overset{+}{V})} \overset{+}{\rho} \overset{r}{c} \overset{r}{T} \overset{l}{T} d\overset{+}{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{(\overset{+}{V})} \overset{+}{\rho} \overset{r}{c} \overset{r}{T} \overset{l}{T} d\overset{+}{V} = 0 \quad \text{für } r \neq l. \quad (4.87)$$

Durch Einsetzen von (4.87)₂ in (4.85) erhält man:

$$\int_{(\overset{+}{V})} \overset{r}{T}_{,k} \underbrace{\lambda \overset{+}{g}{}^{km} \overset{l}{T}_{,m}}_{-\overset{l}{h}{}^k} d\overset{+}{V} + \overset{r}{I} = 0 \quad \text{für } r \neq l. \quad (4.88)$$

Wir nennen die Beziehungen (4.87)₂ und (4.88) die *Orthonalitätsbedingungen für die Temperatureigenformen*. Unter Ausnutzung dieser Bedingungen gelingt - wie wir noch sehen werden - eine erhebliche Reduktion des Aufwandes bei der numerischen Lösung der gekoppelten Wärmeleitgleichung (4.63).

Zur Lösung dieser partiellen Differenzialgleichung werden wir einen ähnlichen Weg wie bei der Herleitung der Orthogonalitätsbedingungen einschlagen. Wie auch in (4.77) beginnen wir hier mit der *Produktenregel* in der Form

$$\left(\overset{l}{T} \tilde{h}^k\right)|_k = \overset{l}{T}_{,k} \tilde{h}^k + \overset{l}{T} \tilde{h}^k|_k. \quad (4.89)$$

Nach Integration über $\overset{+}{V}$ und Ausnutzung des *Gaußschen Integralsatzes* erhält man dann:

$$\int_{(\overset{+}{A}^*)} \overset{l}{T} \tilde{h}^k \overset{+}{N}_k d\overset{+}{A}^* = \int_{(\overset{+}{V})} \overset{l}{T}_{,k} \tilde{h}^k d\overset{+}{V} + \int_{(\overset{+}{V})} \overset{l}{T} \tilde{h}^k|_k d\overset{+}{V} \quad (4.90)$$

$\tilde{h}^k|_k$ kann nun durch die gemäß der gekoppelten dynamischen Wärmeleitgleichung äquivalenten Terme ersetzt werden: Durch Einsetzen von (4.63) in (4.90) folgt also eine *globale Formulierung der gekoppelten dynamischen Wärmeleitgleichung*³⁷:

$$\begin{aligned} \int_{(\overset{+}{V})} \overset{+}{\rho} \overset{l}{c} \overset{l}{T} \overset{\bullet}{T} d\overset{+}{V} - \int_{(\overset{+}{V})} \overset{l}{T}_{,k} \tilde{h}^k d\overset{+}{V} + \int_{(\overset{+}{A}^*)} \overset{l}{T} \tilde{h}^k \overset{+}{N}_k d\overset{+}{A}^* + \int_{(\overset{+}{V})} \gamma^* \overset{l}{T} (\check{T} + \tilde{T}) \left(\overset{\bullet}{\gamma}_\alpha^\alpha + \theta^3 \overset{\bullet}{\kappa}_\beta^\alpha \overset{+}{\nu}_\alpha^\beta \right) d\overset{+}{V} = \\ - \int_{(\overset{+}{V})} \overset{+}{\rho} \overset{l}{c} \overset{l}{T} \overset{\bullet}{T} d\overset{+}{V}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Ersetzt man nun die Temperatur und die Wärmeströme durch die Separationsansätze (4.65), so kann man die Gleichung (4.91) mit (4.64) und unter Ausnutzung der Orthogonalitätsbedingungen auf die folgende Form bringen:

$$\boxed{\overset{l}{\check{A}} \overset{\bullet}{f}(t) + \overset{l}{\check{B}} \overset{l}{f}(t) + \overset{l}{\check{C}}(t) = \overset{l}{\check{D}} \overset{\bullet}{g}(t) \quad \text{für } l = 1, 2, \dots, l_{max}.} \quad (4.92)$$

³⁷Der hier eingeschlagene Weg - ausgehend von der Produktenregel - zur Überführung der Differenzialgleichung der gekoppelten (dynamischen) Wärmeleitung in eine Integralgleichung beruht auf dem in [72] (im Rahmen einer FE-Formulierung) aufgezeigten Weg.

Die zeitunabhängigen Größen $\overset{l}{\tilde{A}}$, $\overset{l}{\tilde{B}}$ und $\overset{l}{\tilde{D}}$ können vorab aus den Temperatureigenformen $\overset{l}{T}(\theta^k)$ und der statischen Temperaturverteilung $\check{T}(\theta^k)$ berechnet werden:

$$\overset{l}{\tilde{A}} = \int_{(\overset{+}{V})}^+ \rho c \overset{l}{T} \overset{l}{T} d\overset{+}{V}, \quad \overset{l}{\tilde{B}} = \int_{(\overset{+}{V})}^+ \lambda \overset{l}{T}_{,k} \overset{+}{g}{}^{km} \overset{l}{T}_{,m} d\overset{+}{V} + I, \quad \overset{l}{\tilde{D}} = - \int_{(\overset{+}{V})}^+ \rho c \overset{l}{T} \check{T} d\overset{+}{V}. \quad (4.93)$$

Die Größe $\overset{r}{\tilde{C}}(t)$ bezeichnet den *zeitabhängigen skalarwertigen Kopplungsterm*:

$$\overset{l}{\tilde{C}}(t) = \int_{(\overset{+}{V})}^+ \gamma^{*l} \overset{l}{T} \left\{ \underbrace{T_0 + \check{T}g(t) + \sum_r \left[\overset{r}{T} \overset{r}{f}(t) \right]}_{(\approx T_0)} \right\} \left(\overset{\bullet}{\gamma}_\alpha^\alpha + \theta^3 \overset{\bullet}{\kappa}_\beta^\alpha \overset{+}{v}_\alpha^\beta \right) d\overset{+}{V}. \quad (4.94)$$

Bei Linearisierung wird der Ausdruck in der geschweiften Klammer - der die tatsächliche Temperatur T im Momentanzustand repräsentiert - näherungsweise durch die Temperatur im Ausgangszustand T_0 ersetzt.

Die schon oben mehrfach verwendete Aufspaltung der den Momentanzustand beschreibenden Größen in einen quasistatischen und einen dynamischen Anteil gelingt auch für die im Kopplungsterm enthaltenen zeitlichen Ableitungen der konstitutiven Variablen:

$$\overset{\bullet}{\gamma}_\alpha^\alpha = \overset{\bullet}{\check{\gamma}}_\alpha^\alpha + \overset{\bullet}{\check{\gamma}}_\alpha^\alpha; \quad \overset{\bullet}{\kappa}_\beta^\alpha = \overset{\bullet}{\check{\kappa}}_\beta^\alpha + \overset{\bullet}{\check{\kappa}}_\beta^\alpha. \quad (4.95)$$

In den dynamischen Anteilen müssen dann noch die über die konstitutiven Beziehungen (3.37/38) mit (B.21) eingehenden Verschiebungskomponenten \tilde{v}^r durch Separationsansätze (4.56)₁ ersetzt werden. Im Rahmen einer *Theorie kleiner Verformungen* - also bei Linearisierung in \tilde{v}^k - gilt dann beispielhaft für die zeitlichen Änderungen von γ_α^α :

$$\overset{\bullet}{\gamma}_\alpha^\alpha = \overset{\bullet}{\check{\gamma}}_\alpha^\alpha + \sum_{(L)}^n \overset{n}{\gamma}_\alpha^\alpha \overset{\bullet}{h}(t) \quad \text{mit} \quad \overset{n}{\gamma}_\alpha^\alpha = \overset{n}{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{+}{a}{}^{\beta\alpha} \quad (4.96)$$

und $\overset{n}{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\overset{n}{v}{}^\pi|_\beta \overset{+}{a}_{\alpha\pi} + \overset{n}{v}{}^\pi|_\alpha \overset{+}{a}_{\beta\pi} \right).$

Über den *skalarwertigen Kopplungsterm* $\overset{l}{\tilde{C}}(t)$ gehen also in (4.92) auch zeitliche Ableitungen von $\overset{n}{h}(t)$ ein. Diese Zeitfunktionen sind über Separationsansätze den Eigenschwingformen der Schale zugeordnet.

Zusammenfassung:

Bei einer thermoelastisch gekoppelten Analyse von Schalentragswerken muss also vorab das quasistatische Problem unter Beachtung der (inhomogenen) Randbedingungen gelöst werden. Sind dann noch die Eigenschwingformen, als auch die Temperatureigenformen, die jeweils eine Erfüllung der homogenen Randbedingungen gewährleisten müssen, bekannt, so kann das dynamische Problem mit einem *reinen Zeitdifferentialgleichungssystem* - bestehend aus (4.61) und (4.92) - numerisch gelöst werden³⁸.

$$\begin{array}{ll}
 \tilde{W}_G^k + \tilde{W}_R^k + \tilde{E}^k = 0 & \text{für } k = 1, 2, \dots, k_{max} \\
 \tilde{A}^l \dot{f}(t) + \tilde{B}^l f(t) + \tilde{C}^l(t) = \tilde{D}^l \dot{g}(t) & \text{für } l = 1, 2, \dots, l_{max}
 \end{array} \quad (4.97)$$

Hierbei müssen dann noch die jeweiligen Anfangsbedingungen beachtet werden.

³⁸Siehe z.B. (7.11) in Berechnungsbeispiel 1.

Kapitel 5

Die Formulierung einer kinetischen Stabilitätstheorie für thermomechanisch beanspruchte Flächentragwerke

Bei Stab- und Flächentragwerken kann es insbesondere unter hohen Druckbeanspruchungen zu einem *Stabilitätsversagen* kommen. Dieses ist meist verbunden mit dem plötzlichen Auftreten von großen Verformungen, die in der Regel zu einer Zerstörung des Gesamttragwerks führen. Um in der Berechnungspraxis die jeweiligen *kritischen* Beanspruchungen eines Tragwerks, die zu Instabilitätserscheinungen führen, bestimmen zu können, ist es sinnvoll, sich einer übergeordneten Stabilitätstheorie zu bedienen. Ein ganz besonders breites Feld von Problemen, die mit dem Phänomen 'Instabilität' zu tun haben, kann man mit einer *kinetischen Stabilitätstheorie* erfassen. Eine solche Theorie, basierend auf dem *Ljapunowschen Stabilitätsbegriff*, soll im Folgenden für thermomechanisch beanspruchte Flächentragwerke formuliert werden. Der Ljapunowsche Stabilitätsbegriff ist eng verknüpft mit dem Begriff der *Störung*: Beliebige zeitveränderliche *Grundzustände*, in denen sich ein Schalentragswerk befindet, werden gestört; anschließend beurteilt man - je nachdem wie sich eine solche Störung auswirkt - den Grundzustand, also das Tragwerk mit der dazugehörigen Belastung, auf seine Stabilität hin. Lassen sich Störungen (in den Anfangsbedingungen) so begrenzen, dass sie zu späteren Zeiten innerhalb einer vorgebbaren ϵ -Umgebung verbleiben, so spricht man von *Stabilität* im Sinne Ljapunows.

In diesem Sinne werden in [12] Stabilitätsgleichungen für mechanisch beanspruchte Schalentragswerke formuliert und auch gelöst. In der vorliegenden Arbeit soll im Rahmen einer Erweiterung die kinetische Stabilitätstheorie auch auf thermomechanisch beanspruchte Schalentragswerke angewendet werden. In der Praxis sind Instabilitätserscheinungen in Verbindung mit thermischen Beanspruchungen immer dann möglich, wenn eine Erwärmung der Struktur und die dadurch hervorgerufenen Längsdehnungen durch Lager oder örtliche Versteifungen behindert wird: Dann treten

in der Regel hohe Drücke bzw. positive Normalkräfte auf, die - bei Überschreiten einer *kritischen Belastungsgrenze*- zu einem seitlichen Ausbeulen (d.h. Instabilwerden) der Struktur führen können.

Wir werden im nachfolgenden Abschnitt sehen, dass ohne Beachtung der Kopplung eine Anwendung der in [12] formulierten Stabilitätsgleichungen ohne Weiteres gelingt. Es muss lediglich beachtet werden, dass in die Schnittreaktionen des Grundzustandes (z.B. $\overset{\circ}{n}^{\alpha\beta}$) auch *temperaturbedingte Anteile* eingehen, siehe Abschnitt 3.3.2.

Wird hingegen der Kopplungsterm in der Wärmeleitgleichung mitgenommen, sind also Temperatur- und Verformungsfelder der Schale zu jedem Zeitpunkt einer dynamischen Berechnung miteinander gekoppelt, so *muss die gekoppelte Wärmeleitgleichung in die kinetische Stabilitätsanalyse mit einbezogen werden*. Wie wir sehen werden, muss dann der in der Mechanik übliche Störungsbegriff dahingehend erweitert werden, dass auch *Störungen in der Temperatur* beim Übergang in einen *gestörten Nachbarzustand* möglich werden.

5.1 Die Stabilitätstheorie ohne Beachtung der Kopplung

Ohne Beachtung des Kopplungsterms in der Wärmeleitgleichung kann diese vorab gelöst werden, sodass die Temperaturen im Schalenraum zu jedem Zeitpunkt t der Untersuchung als bekannt vorausgesetzt werden können. Hieraus resultieren *innere thermische Belastungen* des Schalentragswerks, siehe Abschnitt 3.4. Neben diesen kann das Tragwerk auch noch von äußeren mechanischen Lasten (z.B. p^k) beansprucht werden, sodass es sich ausgehend vom Ausgangszustand in einen Momentanzustand zum Zeitpunkt t bewegen wird. Zur Berechnung dieses Momentanzustandes müssen unter Beachtung der jeweiligen Randbedingungen und der konstitutiven Gleichungen die in Abschnitt 3.2 aufgestellten Bewegungsgleichungen (Differenzialgleichungen) gelöst werden, die bei vorgegebener thermomechanischer Beanspruchung - und bei Elimination der Querkräfte - nur noch von den Komponenten des Verschiebungsvektors $v^k(\theta^r, t)$ abhängen. Für einen materiellen Punkt P der Mittelfläche kann dann die Lösung der Bewegungsgleichungen durch eine *Bewegungsbahn im Anschauungsraum* veranschaulicht werden.

Will man eine solche Bewegungsbahn auf ihre *kinetische Stabilität* hin untersuchen, so bringt man kleine Störungen auf und untersucht die gestörte Bewegungsbahn. Üblicherweise wird die gestörte Bewegungsbahn mit der ungestörten *verglichen*, indem man bestimmte Abstandsmaße (hier $|\mathbf{v}|$) einführt, die die Unterschiede zweier Zustände hervorheben. In diesem Zusammenhang wird für Zustände auf der *ungestörten Bahn* die Bezeichnung *Grundzustand* und für Zustände auf der *gestörten Bahn* die Bezeichnung *Nachbarzustand* eingeführt¹, siehe Abbildung 5.1.

¹Nachbar- bzw. Grundzustand bezeichnen Momentanzustände, die sich zum Zeitpunkt t einstellen, je nach dem, ob gestört wurde oder nicht: *Grundzustand* = ungestörter Momentanzustand; *Nach-*

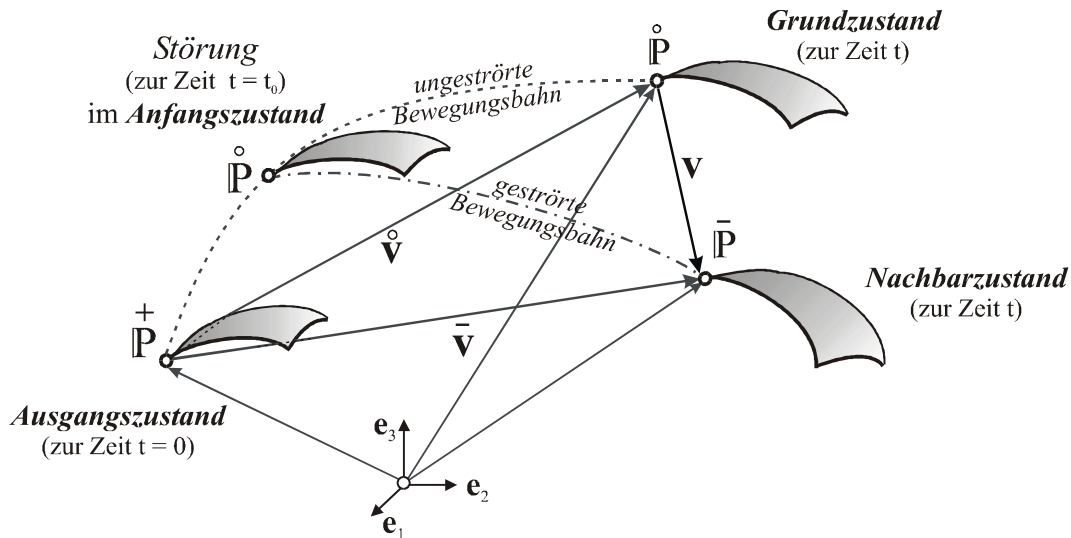


Abbildung 5.1: Gestörte und ungestörte Bewegungsbahn eines materiellen Punktes P auf der Mittelfläche

Von allen möglichen Störungen² wird im Rahmen der hier zum Einsatz kommenden *Ljapunowschen Stabilitätstheorie* lediglich eine *Störung in den Anfangsbedingungen* der Stabilitätsgleichungen angesetzt. Wie in Abbildung 5.1 dargestellt, führt das Aufbringen einer solchen Störung im *Anfangszustand* zum Zeitpunkt t_0 zu einer - gegenüber der ursprünglichen (*ungestörten*) Bewegungsbahn - veränderten (*gestörten*) Bewegungsbahn, die zum Zeitpunkt t in einen Nachbarzustand mündet. Der Verschiebungsvektor $\bar{\mathbf{v}}$ des Nachbarzustandes lässt sich dann - ebenso wie seine Komponenten \bar{v}^k - in einen Anteil des Grundzustandes und einen störungsbedingten Zuwachs aufspalten:

$$\underbrace{\bar{\mathbf{v}}}_{\bar{v}^k \mathbf{a}_k} = \underbrace{\overset{\circ}{\mathbf{v}}}_{\overset{\circ}{v}^k \mathbf{a}_k} + \underbrace{\mathbf{v}}_{v^k \mathbf{a}_k} \quad \Rightarrow \quad \bar{v}^k = \overset{\circ}{v}^k + v^k. \quad (5.1)$$

Während im Folgenden die Größen des Nachbarzustandes (z.B. $\bar{v}^k, \bar{m}^{\alpha\beta}$) mit einem aufgesetzten '–' und die Größen des Grundzustandes (z.B. $\overset{\circ}{v}^k, \overset{\circ}{m}^{\alpha\beta}$) mit einer aufgesetzten Null gekennzeichnet werden, erhalten die störungsbedingten Zuwächse (z.B. $v^k, m^{\alpha\beta}$) keine gesonderte Kennzeichnung.

Im Sinne Ljapunows wird die ursprüngliche Bewegungsbahn - und damit der zeitveränderliche Grundzustand - dann als *stabil* bezeichnet, wenn man allein durch Begrenzen der Anfangsstörung

$$v^k(t_0) \quad \text{und} \quad \dot{v}^k(t_0) \quad (5.2)$$

zur Zeit t_0 die Störung zu allen späteren Zeiten t innerhalb einer ϵ -Umgebung halten kann:

$$|\mathbf{v}(t)| < \epsilon \quad \text{für} \quad t > t_0 \quad (5.3)$$

barzustand = gestörter Momentanzustand.

²Neben Störungen in den Anfangsbedingungen wären z.B. auch Störungen in der Struktur der Differenzialgleichung möglich.

Als *Abstandsmaß* - zwischen Grund- und Nachbarzustand - wird also hier der Betrag des Störverschiebungsvektors³ verwendet. Um die Stabilität eines Schalentragswerks unter vorgegebener Belastung kontrollieren zu können, müssen also zunächst die Komponenten des Störverschiebungsvektors $v^k(\theta^\alpha, t)$ aus den Stabilitätsgleichungen berechnet werden.

Die Formulierung und Lösung der Stabilitätsgleichungen für Schalentragswerke gelingt, indem man unter Berücksichtigung der Randbedingungen auf die vektoriellen Bewegungsgleichungen (3.15) des Nachbarzustandes das PvV anwendet und anschließend die für sich erfüllten Arbeitsanteile des Grundzustandes abspaltet. Dieser Lösungsweg führt, wie in [12] ausführlich gezeigt wird, letztendlich auf die folgende *Stabilitätsgleichung in Gestalt einer Arbeitsformulierung*⁴:

$$\boxed{W_G^{virt} + W_R^{virt} + E^{virt} = 0}$$

mit

$$W_G^{virt} = \int_{(\dot{A})} s^{\alpha\beta} \delta\gamma_{\alpha\beta} d\dot{A} + \int_{(\dot{A})} m^{\alpha\beta} \delta\kappa_{\alpha\beta} d\dot{A} + \int_{(\dot{A})} s^{\alpha\beta} \delta\Delta\gamma_{\alpha\beta} d\dot{A} + \int_{(\dot{A})} n^{\alpha\beta} \delta\Delta\gamma_{\alpha\beta} d\dot{A} + \\ + \int_{(\dot{A})} m^{\alpha\beta} \delta\Delta\rho_{\alpha\beta} d\dot{A}; \quad E^{virt} = \int_{(\dot{A})} \ddot{m}^{\alpha\beta} \ddot{a}_{ki} \delta v^i d\dot{A} + \dots; \quad W_R^{virt} = \int_{(s)} (\overset{o}{\mathbf{m}}_{(e)} \cdot \overset{o}{\mathbf{a}}_\alpha) c_\beta^\alpha \delta\varphi^\beta ds$$

$$\text{und } \Delta\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} v^k|_\alpha v^n|_\beta \overset{+}{a}_{kn}; \quad \Delta\gamma_\alpha = v^k|_\alpha \phi_3^n \overset{+}{a}_{kn}; \quad \Delta\rho_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\gamma} v^\lambda|_\rho \overset{+}{a}_{\lambda\beta} \overset{+}{a}^{\gamma\rho};$$

$$\delta\varphi^\beta = \bar{\epsilon}^{\beta\alpha} \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \delta\mathbf{a}_\alpha; \quad c_\beta^\alpha = (\mathbf{a}_3 \cdot \overset{o}{\mathbf{a}}^3) \delta_\beta^\alpha + \epsilon^{\rho\alpha} [\overset{o}{\mathbf{a}}_\rho \cdot (\mathbf{a}_\beta \times \mathbf{a}_3)] . \quad (5.4)$$

Abweichend zu [12] werden hier nichtrichtungstreue Lasten, Dämpfungseinflüsse sowie mögliche federnde Lagerungen in der Stabilitätsgleichung (5.4)₁ nicht berücksichtigt. Geometrische Nichtlinearitäten in den Verschiebungskomponenten v^k sind hier vollständig enthalten.

Die Schnitt- und Verformungsgrößen des Grundzustandes, der auf seine Stabilität hin untersucht werden soll, müssen vorab unter Anpassung an die inhomogenen Randbedingungen⁵ berechnet werden. Die mit einer aufgesetzten Null gekennzeichneten Größen

³Gemäß [63] ändert man nach einem Vorschlag von Koiter die Stabilitätsbedingung - hier (5.3) - häufig dahingehend ab, dass man die Betragsbildung $|\dots|$ für jeden beliebigen materiellen Punkt im Kontinuum abschwächend durch die Norm $||\dots|| = \sqrt{\int_V (\dots)^2 dV}$ ersetzt. Bei flächigen Strukturen muss dann gelten $||\dots|| = \sqrt{\int_A (\dots)^2 dA}$.

⁴Die Vorgehensweise zur Formulierung und Lösung der Stabilitätsgleichungen verläuft analog zu dem in Abschnitt 4.6 aufgezeigten Lösungsweg: Den quasistatischen Größen $(\overset{o}{\dots})$ aus Abschnitt 4.6 entsprechen hier die Größen des Grundzustandes (\dots) . Und den dynamischen Größen $(\ddot{\dots})$ aus Abschnitt 4.6 entsprechen hier Störgrößen (\dots) . Der äußere Aufbau der Stabilitätsgleichungen in (5.4) weist deshalb eine deutliche Ähnlichkeit mit den Beziehungen (4.51)-(4.55) auf!

⁵Das in Abschnitt 4.4.1 zur Formulierung inhomogener und homogener Randbedingungen Gesagte

gelten somit in (5.4) und im Folgenden als bekannt. Wie wir noch sehen werden, können - im Rahmen einer nichtlinearen Theorie - Verformungsgrößen des Grundzustandes auch in Störgrößen eingehen.

Die in (5.1) angegebene additive Aufspaltung gilt nicht nur für die Verschiebungskomponenten, sondern für alle weiteren, den mechanischen Zustand der Schale beschreibenden Größen. Deshalb gilt beispielsweise für die in der Stabilitätsgleichung vertretenen störungsbedingten Momentenzuwächse $m^{\alpha\beta}$:

$$m^{\alpha\beta} = \bar{m}^{\alpha\beta} - \overset{o}{m}^{\alpha\beta}. \quad (5.5)$$

Da - wie schon oben angesprochen - die Temperaturverteilung im Schalenraum vorab berechnet wird und somit feststeht, gilt dies auch für die *thermischen konstitutiven Variablen*, siehe (3.41). Die *konstitutive Gleichung für die Momentenzuwächse* muss dann den folgenden allgemeinen Aufbau haben:

$$m^{\alpha\beta} = m^{\alpha\beta}(\gamma_{\rho\lambda}, \kappa_{\rho\lambda}) \quad \text{mit} \quad \gamma_{\rho\lambda} = \bar{\gamma}_{\rho\lambda} - \overset{o}{\gamma}_{\rho\lambda}; \quad \kappa_{\rho\lambda} = \bar{\kappa}_{\rho\lambda} - \overset{o}{\kappa}_{\rho\lambda}. \quad (5.6)$$

Im Rahmen einer ungekoppelten Analyse hängen also die Schnittgrößenzuwächse nur noch von *störungsbedingten Deformationen* $(\gamma_{\rho\lambda}, \kappa_{\rho\lambda})$, aber nicht mehr von Temperaturänderungen ab.

Beispielhaft soll hier die Bestimmung der störungsbedingten Zuwächse in den Verzerrungen der Mittelfläche gezeigt werden: Unter Beachtung von (3.37) können die Anteile des Grund- von den des Nachbarzustandes abgespalten werden. Die Störgröße $\gamma_{\rho\lambda}$ ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} \gamma_{\rho\lambda} &= \bar{\gamma}_{\rho\lambda} - \overset{o}{\gamma}_{\rho\lambda} = \underbrace{\gamma_{\rho\lambda}}_{(L)} + \underbrace{\gamma_{\rho\lambda}}_{(G)} + \underbrace{\gamma_{\rho\lambda}}_{(N)} \quad \text{mit} \\ \gamma_{\rho\lambda}^{(L)} &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\Phi_{\lambda}^{\pi} \overset{+}{a}_{\rho\pi} + \Phi_{\rho}^{\pi} \overset{+}{a}_{\lambda\pi} \right)}_{\text{linear}}, \quad \gamma_{\rho\lambda}^{(G)} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\overset{o}{\Phi}_{\lambda}^s \Phi_{\rho}^k + \overset{o}{\Phi}_{\rho}^k \Phi_{\lambda}^s \right)}_{\text{gekoppelt}} \overset{+}{a}_{sk}, \quad \gamma_{\rho\lambda}^{(L)} = \frac{1}{2} \underbrace{\Phi_{\lambda}^s \Phi_{\rho}^k \overset{+}{a}_{sk}}_{\text{nichtlinear}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die entsprechenden Beziehungen für $\kappa_{\rho\lambda}$ finden sich im Anhang B, siehe (B.31). Die in (5.7) enthaltenen Zuwächse Φ_k^i beschreiben störungsbedingte Änderungen in den Basisvektoren, es gilt:

$$\underbrace{\mathbf{a}_i}_{\Phi_i^k \overset{+}{\mathbf{a}}_k} = \underbrace{\bar{\mathbf{a}}_i}_{\bar{\Phi}_i^k \overset{+}{\mathbf{a}}_k} - \underbrace{\overset{o}{\mathbf{a}}_i}_{\overset{o}{\Phi}_i^k \overset{+}{\mathbf{a}}_k} \quad \Rightarrow \quad \Phi_i^k = \bar{\Phi}_i^k - \overset{o}{\Phi}_i^k. \quad (5.8)$$

In die Deformationskoeffizienten $\overset{o}{\Phi}_i^k$ bzw. $\bar{\Phi}_i^k$ gehen jeweils die kovarianten Ableitungen der Verschiebungskomponenten des Grund- bzw. Nachbarzustandes ein, siehe (B.21).

kann auch auf die Abspaltung des Grund- vom Nachbarzustandes übertragen werden: Die dem quasistatischen Problem zugeordneten inhomogenen Randbedingungen gelten hier für die Größen des Grundzustandes, während die dem dynamischen Problem zugeordneten homogenen Randbedingungen hier für die Störgrößen gelten!

Nach Abspalten der Anteile des Grundzustandes kann die Störgröße Φ_i^k in allgemeiner Form angegeben werden:

$$\Phi_i^k = \Phi_{(L)}^k + \Phi_{(G)}^k + \Phi_{(N)}^k \quad (5.9)$$

Analog zu (5.7) bezeichnet hier der mit (L) gekennzeichnete Anteil der Störgröße Terme, die linear von $v^r|_m$ abhängen, der mit (G) gekennzeichnete Anteil Terme, die mit $\dot{v}^r|_m$ gekoppelt sind und der mit (N) gekennzeichnete Anteil Terme, in die $v^r|_m$ nicht-linear eingeht. Aus Platzgründen sind die formelmäßigen Auswertungen der genannten Anteile im Anhang B angegeben, siehe (B.30).

Meist werden - im Rahmen einer Näherung - konkrete Berechnungen mit linearisierten Stabilitätsgleichungen durchgeführt, in denen die mit (G) und (N) gekennzeichneten Anteile konsequent gestrichen werden. Berücksichtigt man hingegen neben den linearen auch die mit (G) gekennzeichneten gekoppelten Terme - in die die Verformungen des Grundzustandes eingehen - , so spricht man [5] von einer *nichtlinearen Indifferenztheorie*. Bei in [12] durchgeführten Stabilitätsanalysen werden neben den Verformungen des Grundzustandes auch Nichtlinearitäten in den Störverschiebungen - also die Terme mit (N) - mitgenommen.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass nur mittels einer *nichtlinearen Stabilitätstheorie*, die auch Terme mit (N) berücksichtigt, die auftretenden Störverschiebungen *quantitativ* berechnet werden können. Aussagen über die *kinetische Stabilität* der Grundzustände können dann durch Anwendung des *Stabilitätskriteriums* (5.3) getroffen werden.

Werden hingegen Terme mit (N) nicht mitgenommen, so sind die zu lösenden Stabilitätsgleichungen *linear* in v^k (dies gilt auch im Rahmen einer *nichtlinearen Indifferenztheorie*). Es können dann nur noch *qualitative* Aussagen darüber gemacht werden, ob die jeweilige thermomechanische Beanspruchung unter- oder oberhalb einer *kritischen* Grenze liegt. *Überkritische Beanspruchungen* sind dann im Sinne des Ljapunowschen Stabilitätsbegriffs dadurch gekennzeichnet, dass es durch Begrenzen der Anfangsstörungen (5.2) nicht mehr gelingt, die Störung zu späteren Zeiten innerhalb einer ϵ -Umgebung zu halten, so dass gegen (5.3) verstoßen wird: Die hierzu gehörenden Grundzustände werden dann als *instabil* bezeichnet.

Da die Größen des Grundzustandes vorab berechnet werden, hängt die Stabilitätsgleichung (5.4) lediglich von den Komponenten v^k des Störverschiebungsvektors ab. Für diese Unbekannten machen wir die gleichen *Seperationsansätze* (mit bekannten Eigenformen und unbekannten Zeitfunktionen) wie in (4.56):

$$v^r = \sum_n \left[\dot{v}^r(\theta^\alpha) h^n(t) \right] \Rightarrow \delta v^r = \sum_k \left[\dot{v}^r(\theta^\alpha) \delta h^k(t) \right] \quad (5.10)$$

Die weitere Vorgehensweise entspricht der in Abschnitt 4.5: Durch Einbau der Seperationsansätze in die Stabilitätsgleichung (5.4) kann diese auf die folgende Form gebracht werden:

$$\sum_k \left[\overset{k}{W}_G + \overset{k}{W}_R + \overset{k}{E} \right] \delta h^k = 0 \quad (5.11)$$

Da die darin enthaltenen Variationen der Zeitfunktionen δh^k beliebig und voneinander unabhängig sind, fordert man:

$$\boxed{W_G^k + W_R^k + E_G^k = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \dots, k_{max}} \quad (5.12)$$

Bei der Lösung der Stabilitätsgleichungen ist insbesondere auf die Ausnutzung der in (4.57) formulierten Orthogonalitätsbedingungen zu achten, da hierdurch der numerische Aufwand erheblich reduziert werden kann. Der hier beschriebene Lösungsweg ist unabhängig davon, ob man die Stabilitätsgleichungen im Rahmen einer in v^k linearen oder nichtlinearen Theorie formuliert. Der zu betreibende numerische Lösungsaufwand steigt natürlich mit der Zahl der jeweils mitgenommenen Anteile.

Als Unbekannte sind in (5.12) lediglich die den jeweiligen Eigenschwingformen zugeordneten Zeitfunktionen $\overset{n}{h}(t)$ verblieben. Liefert die Lösung des *homogenen Zeitdifferenzialgleichungssystems* (5.12) bei begrenzten Anfangsstörungen (5.2) - die hier als *Anfangsbedingungen* zu berücksichtigen sind - Zeitfunktionen $\overset{n}{h}(t)$, die für alle Zeiten $t > t_0$ auf Störungen schließen lassen, die gemäß (5.3) innerhalb einer ϵ -Umgebung verbleiben, so spricht man von *Stabilität* im Sinne Ljapunows.

5.2 Die Stabilitätstheorie mit Beachtung der Kopplung

Bei Berücksichtigung des Kopplungsterms in der Wärmeleitgleichung können die *inneren thermischen Belastungen*⁶ des Schalentragswerks nicht mehr vorab berechnet werden, weil die Temperaturfelder im Schalenraum mit den Deformationen der Mittelfläche gekoppelt sind. Ausgangspunkt einer *thermoelastisch gekoppelten Stabilitätsanalyse* ist also das gekoppelte Differenzialgleichungssystem (4.1/3) bestehend aus den nichtlinearen Bewegungsgleichungen und der gekoppelten Wärmeleitgleichung. Neben den unbekannten Verschiebungskomponenten v^k ($k = 1, 2, 3$) tritt hierin auch die unbekannte Temperatur T im Schalenraum auf. Die Lösungen des Differenzialgleichungssystems können dann - im Gegensatz zu einer entkoppelten Analyse - nichtmehr allein durch die Bewegungsbahnen von materiellen Punkten der Mittelfläche veranschaulicht werden, da mit der Temperatur eine *vierte Variable* hinzu kommt, die auch von der Dickenrichtung θ^3 abhängt.

Strenggenommen müssen also hier 'Bewegungsbahnen' von materiellen Punkten Q des Schalenraumes auf ihre Stabilität hin untersucht werden, wobei diese 'Bewegungsbahnen' nicht mehr im Anschauungsraum, sondern in einem *4-dimensionalen*

⁶In Abschnitt 3.4 werden die *konstitutiven Variablen* $\Delta \overset{n}{T}$ als *innere thermische Belastungen* eines Schalentragswerks bezeichnet. Hierunter kann man aber auch die *temperaturbedingten Schnittreaktionen* der Mittelfläche ($\overset{T}{s^{\alpha\beta}}, \overset{T}{n^{\alpha\beta}}, \overset{T}{m^{\alpha\beta}}$) verstehen, die linear von $\Delta \overset{n}{T}$ abhängen.

$Lösungsraum$ ⁷ verlaufen, der durch die *Koordinaten*⁸ w^k und T aufgespannt wird.

Für einen materiellen Punktes Q im Schalenraum kann dann ein Grundzustand auf der ungestörten 'Bewegungsbahn' durch einen *Lösungsvektor* $\overset{o}{\mathbf{x}} = \left[\overset{o}{w}^1, \overset{o}{w}^2, \overset{o}{w}^3, \overset{o}{T} \right]^T$ festgelegt werden. Stört man im Sinne Ljapunows im Anfangszustand zur Zeit t_0 , so stellt sich für den Punkt Q eine gestörte 'Bewegungsbahn' ein, die zum Zeitpunkt t in einen Nachbarzustand mündet, der durch den *Lösungsvektor* $\bar{\mathbf{x}} = \left[\bar{w}^1, \bar{w}^2, \bar{w}^3, \bar{T} \right]^T$ eindeutig beschrieben wird. Als Maß für den 'Abstand' zwischen Grund- und Nachbarzustand wird der Betrag $|\mathbf{x}|$ des *4-dimensionalen Störvektors*

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} - \overset{o}{\mathbf{x}} = \left[w^1, w^2, w^3, T \right]^T \quad (5.13)$$

eingeführt. Der zeitveränderliche Grundzustand wird dann als *stabil* im Sinne Ljapunows bezeichnet, wenn man durch Begrenzen der *Anfangsstörung*

$$w^k(t_0), \dot{w}^k(t_0) \text{ und } T(t_0) \quad (5.14)$$

die Störung zu allen späteren Zeiten innerhalb einer ϵ -*Umgebung* halten kann:

$$|\mathbf{x}| < \epsilon \text{ für } t > t_0. \quad (5.15)$$

Für eine sinnvolle Betragsbildung $|\mathbf{x}|$ in (5.15) sollten die Komponenten w^k und T dimensionslos gemacht werden. Dies gelingt, indem man die Komponenten des Verschiebungsvektors und die Temperatur durch Referenzgrößen (Index R) dividiert:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(w^1/v_R)^2 + (w^2/v_R)^2 + (w^3/v_R)^2 + (T/T_R)^2} \quad (5.15a)$$

Um zu vermeiden, dass Einflüsse aus störungsbedingten Temperaturänderungen bei der Betragsbildung übergewichtet werden, sollte T_R entsprechend groß gewählt werden!

Mit der *Normalenhypothese* lassen sich die Verschiebungen im Schalenraum allein durch Verschiebungen der Mittelfläche ausdrücken, siehe Abschnitt 3.1. Dann lässt sich folgern:

1. Eine Anfangsstörung in $w^k(t_0)$ und $\dot{w}^k(t_0)$ kann durch eine Anfangsstörung in $v^k(t_0)$ und $\dot{v}^k(t_0)$ ersetzt werden.
2. Zur Kontrolle der *Stabilitätsbedingung* (5.15) können die Komponenten w^k in \mathbf{x} durch v^k ersetzt werden ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$). Hierbei ist zu beachten, dass die Komponenten v^k Größen der Mittelfläche sind und deshalb in Dickenrichtung θ^3 nicht variieren.

Unter Berücksichtigung der Kirchhoff-Kinematik kann also das oben für thermoelastisch gekoppelte Schalentragwerke formulierte Ljapunowsche Stabilitätskriterium dahingehend abgeändert werden, dass man nun einen

⁷In Kapitel 1.1 haben wir in diesem Zusammenhang auch von einem 'thermodynamischen Raum' gesprochen.

⁸ w^k bezeichnet die Komponenten des Verschiebungsvektors \mathbf{w} im Schalenraum, siehe Abbildung 3.1.

zeitveränderlichen Grundzustand als *stabil* bezeichnet, wenn man durch Begrenzen der *Anfangsstörung*

$$v^k(t_0), \quad \dot{v}^k(t_0) \quad \text{und} \quad T(t_0) \quad (5.16)$$

die *Störung*

$$\mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} - \overset{\circ}{\mathbf{z}} = [v^1, v^2, v^3, T]^T \quad (5.17)$$

zu allen späteren Zeiten innerhalb einer ϵ -Umgebung halten kann:

$$|\mathbf{z}| < \epsilon \quad \text{für} \quad t > t_0. \quad (5.18)$$

Für eine sinnvolle Betragsbildung kann auch hier analog zu (5.15a) verfahren werden.

Zur Formulierung und Lösung der thermoelastisch gekoppelten Stabilitätsgleichungen muss man nun neben den Bewegungsgleichungen, siehe Abschnitt 5.1, auch die gekoppelte Wärmeleitgleichung in die Stabilitätsanalyse mit einbeziehen.

Da dieser Weg in Zusammenhang mit einer Stabilitätstheorie für Schalentragswerke nicht (siehe z.B. [12]) oder nur in spezieller Form (siehe [50]) beschritten wird, werden wir hier in aller Ausführlichkeit zeigen, wie man zunächst die gekoppelte Wärmeleitgleichung des Nachbarzustandes aufstellt, anschließend die des Grundzustandes abspaltet und schließlich - mit einem an die Vorgehensweise in Abschnitt 4.6 angelehnten Verfahren - die sich ergebende *Stabilitätsgleichung der Wärmeleitung* für die Lösung aufbereitet.

Setzt man also in (3.68) die mit einem aufgesetzten '-' gekennzeichneten Größen des Nachbarzustandes ein, so erhält man die *Wärmeleitgleichung des Nachbarzustandes* und das dazugehörige *Stoffgesetz für die Wärmeströme*:

$$\dot{\bar{T}}^+ \rho c + \bar{h}^k|_k + \gamma^* \bar{T} \left(\dot{\bar{\gamma}}_\beta^\beta + \theta^3 \dot{\bar{\kappa}}_\rho^\lambda \dot{\bar{\nu}}_\lambda^\rho \right) = \bar{\rho} h; \quad \bar{h}^k = -\lambda g^{kr} \bar{T}_{,r}. \quad (5.19)$$

Da man in (5.19) alle Größen des Nachbarzustandes jeweils in einen Anteil des Grundzustandes und einen störungsbedingten Zuwachs,

$$\text{z.B.} \quad \bar{h}^k = \overset{\circ}{h}^k + h^k, \quad (5.20)$$

aufspalten kann, kann man die *Wärmeleitgleichung des Grundzustandes*

$$\overset{\circ}{T}^+ \rho c + \overset{\circ}{h}^k|_k + \gamma^* \overset{\circ}{T} \left(\overset{\circ}{\dot{\gamma}}_\beta^\beta + \theta^3 \overset{\circ}{\dot{\kappa}}_\rho^\lambda \overset{\circ}{\dot{\nu}}_\lambda^\rho \right) = \overset{\circ}{\rho} h \quad (5.21)$$

von (5.19) abspalten. Dann verbleibt die *Stabilitätsgleichung der Wärmeleitung*

$$\boxed{\dot{T}^+ \rho c + h^k|_k + C = 0}, \quad (5.22)$$

die mit (5.4) - also der den Bewegungsgleichungen zugeordneten Stabilitätsgleichung - gekoppelt ist. Der *Kopplungsterm* C bezeichnet eine aus Kopplungseffekten resul-

tierende Störgröße, die - analog zu (5.7) - folgendermaßen aufgespalten werden kann:

$$C = C_{(L)} + C_{(G)} + C_{(N)} \quad \text{mit}$$

$$\underbrace{C_{(L)} = \gamma^* T_0 \left(\dot{\gamma}_{(L)}^\beta + \theta^3 \dot{\kappa}_{(L)}^\lambda \dot{\nu}_{(L)}^\rho \right)}_{\text{linear}}; \quad \underbrace{C_{(G)} = \gamma^* T_0 \left(\dot{\gamma}_{(G)}^\beta + \theta^3 \dot{\kappa}_{(G)}^\lambda \dot{\nu}_{(G)}^\rho \right) + \dots}_{\text{gekoppelt}}; \quad \underbrace{C_{(N)} = \gamma^* T_0 \left(\dot{\gamma}_{(N)}^\beta + \theta^3 \dot{\kappa}_{(N)}^\lambda \dot{\nu}_{(N)}^\rho \right) + \dots}_{\text{nichtlinear}} \quad (5.23)$$

Beachtet man noch die Beziehungen (5.7), (B.30) und (B.31), so kann man die jeweiligen Anteile in (5.23) charakterisieren:

- In den linearen Anteil $C_{(L)}$ gehen Störgrößen v^k (bzw. deren Ableitungen) *linear* ein.
- In den Anteil $C_{(G)}$ gehen all diejenigen Beiträge ein, in denen entweder Temperatur- oder Verformungsbeiträge des Grundzustandes mit Störgrößen *gekoppelt* sind.
- $C_{(N)}$ enthält schließlich *nichtlineare* Beiträge in den Störgrößen v^k und T , siehe (B.32).

Wie im vorangegangenen Abschnitt werden auch hier die mit einem aufgesetzten 'o' gekennzeichneten Größen des Grundzustandes als bekannt vorausgesetzt. Diese erfüllen die Bewegungsgleichungen und die damit gekoppelte Wärmeleitgleichung (5.21) des Grundzustandes (im Gebiet) sowie die inhomogenen Randbedingungen⁹.

Die weitere Vorgehensweise zur Lösung der Stabilitätsgleichung (5.22) verläuft analog zu dem in Abschnitt 4.6 geschilderten Lösungsweg: Zunächst werden für die unbekannten Störgrößen T und h^k die gleichen *Seperationsansätze* wie in (4.65) gemacht:

$$T(\theta^r, t) = \sum_l \left[\dot{T}(\theta^r) \dot{f}(t) \right] \Rightarrow h^k(\theta^r, t) = \sum_l \left[\underbrace{-\lambda \dot{g}^{km} \dot{T}_{,m}(\theta^r)}_{\dot{h}^k(\theta^r)} \dot{f}(t) \right]. \quad (5.24)$$

Anschließend kann man mit einer zu (4.89) analogen Formulierung

$$\left(\dot{T} \dot{h}^k \right) |_k = \dot{T}_{,k} \dot{h}^k + \dot{T} \dot{h}^k |_k. \quad (5.25)$$

nach Integration über \dot{V} und Ausnutzung des *Gaußschen Integralsatzes* die Stabilitätsgleichung (5.22) einbauen und erhält somit die folgende *globale Formulierung für die Stabilitätsgleichung der Wärmeleitung*:

$$\underbrace{\int_{(\dot{V})}^+ \dot{\rho} c \dot{T} \dot{T} d\dot{V}}_{(\dot{V})} - \underbrace{\int_{(\dot{V})}^l \dot{T}_{,k} \dot{h}^k d\dot{V}}_{(\dot{V})} + \underbrace{\int_{(\dot{A})}^l \dot{T} \dot{h}^k \dot{N}_k d\dot{A}}_{(\dot{A})} + \underbrace{\int_{(\dot{V})}^l \dot{T} C d\dot{V}}_{(\dot{V})} = 0. \quad (5.26)$$

⁹Zu den inhomogenen bzw. homogenen Randbedingungen gilt auch hier wieder das in Fußnote 5 in Abschnitt 5.1 Gesagte.

Ersetzt man die Störgrößen durch die Ansätze in (5.24), so kann man (5.26) unter Ausnutzung der *Orthogonalitätsbedingungen* (4.87)₂ und (4.88) auf die folgende Form bringen:

$$\dot{\overset{l}{A}} \overset{l}{f}(t) + \overset{l}{B} \overset{l}{f}(t) + \overset{l}{C}(t) = 0 \quad \text{für} \quad l = 1, 2, \dots, l_{max}. \quad (5.27)$$

Die zeitunabhängigen Größen $\overset{l}{A}$ und $\overset{l}{B}$ können vorab aus den Temperatureigenformen berechnet werden. Es gilt:

$$\overset{l}{A} = \int_{(\overset{+}{V})} \rho c \overset{l}{T} \overset{l}{T} d\overset{+}{V}; \quad \overset{l}{B} = \int_{(\overset{+}{V})} \lambda \overset{l}{T}_{,k} \overset{+}{g}^{km} \overset{l}{T}_{,m} d\overset{+}{V} + \overset{ll}{I}. \quad (5.28)$$

Die Temperatureigenformen müssen auch hier wieder - wie in Abschnitt 4.6 ausführlich beschrieben - an die jeweiligen homogenen Randbedingungen des Schalenkontinuums angepaßt werden. Sind an den Begrenzungsflächen als thermische Randbedingungen die Wärmeströme bzw. Temperaturen vorgegeben, so ergibt sich die Größe $\overset{ll}{I}$ in (5.28)₂ zu Null; lediglich bei Konvektionsrandbedingungen muss diese Größe mitgenommen werden, sie berechnet sich dann gemäß (4.84).

In den Kopplungsterm

$$\overset{l}{C}(t) = \int_{(\overset{+}{V})} \overset{l}{T} \overset{l}{C} d\overset{+}{V} \quad (5.29)$$

gehen die in (5.23) - je nach Art der Stabilitätsuntersuchung - aufgeführten Anteile in der Störgröße $\overset{l}{C}$ ein. So ergibt sich beispielsweise im Rahmen einer *linearisierten Stabilitätsuntersuchung* ohne die Beiträge des Grundzustandes:

$$\overset{l}{C}(t) = \int_{(\overset{+}{V})} \overset{l}{T} \overset{l}{C} d\overset{+}{V} = \int_{(\overset{+}{V})} \overset{l}{T} \gamma^* T_0 \left(\overset{\bullet}{\gamma}_{\beta}^{\beta} + \theta^3 \overset{\bullet}{\kappa}_{\rho}^{\lambda} \overset{+}{v}_{\lambda}^{\rho} \right) d\overset{+}{V}. \quad (5.30)$$

In die zeitlichen Änderungen der Störgrößen $\overset{\beta}{\gamma}_{\beta}^{\beta}$ und $\overset{\lambda}{\kappa}_{\rho}^{\lambda}$ gehen dann über die in (5.7),

(B.30) und (B.31) angeschriebenen Beziehungen Zeitableitungen von v^k ein. Mit dem Separationsansatz in (5.10)₁ ergibt sich so beispielhaft für die zeitliche Änderung der Dehnung $\overset{\beta}{\gamma}_{\beta}^{\beta}$ in (5.30):

$$\overset{\bullet}{\gamma}_{\beta}^{\beta} = \sum_n \overset{n}{\gamma}_{\alpha}^{\alpha} \overset{n}{h}(t) \quad \text{mit} \quad \overset{n}{\gamma}_{\alpha}^{\alpha} = \overset{n}{\gamma}_{\alpha\beta}^{\beta} \overset{n}{a}^{\beta\alpha} \quad \text{und} \quad \overset{n}{\gamma}_{\alpha\beta}^{\beta} = \frac{1}{2} \left(\overset{n}{v}^{\pi}|_{\beta} \overset{n}{a}_{\alpha\pi}^{\beta} + \overset{n}{v}^{\pi}|_{\alpha} \overset{n}{a}_{\beta\pi}^{\alpha} \right). \quad (5.31)$$

Das aus der Stabilitätsgleichung der Wärmeleitung ableitbare Zeitdifferentialgleichungssystem (5.27) enthält also neben den unbekannten Zeitfunktionen $\overset{l}{f}(t)$ auch die den Eigenschwingformen zugeordneten Zeitfunktionen $\overset{n}{h}(t)$.

Im vorangegangenen Abschnitt wird - Bezug nehmend auf [12] - mit kurzen Worten erläutert, wie man unter Anwendung des PvV von den Bewegungsgleichungen des

Nachbarzustandes die des Grundzustandes abgespalten kann und so die Arbeitsformulierung (5.4) mit den darin zu beachtenden Beziehungen (5.5)-(5.10) aufgestellt. All diese (Stabilitäts-) Gleichungen können auch hier weitestgehend übernommen werden. Im Rahmen einer *gekoppelten Stabilitätsanalyse* muss lediglich beachtet werden, dass - abweichend zu (5.6)₁ - in die konstitutiven Gleichungen für die störungsbedingten Schnittgrößenzuwächse auch *störungsbedingte Temperaturänderungen*

$$T = \bar{T} - \overset{o}{T} \quad (5.32)$$

eingehen. Somit ergibt sich im Rahmen einer gekoppelten Analyse - hier beispielhaft für die *Momentenzuwächse* - der folgende allgemeine Aufbau für die *konstitutiven Gleichungen*

$$m^{\alpha\beta} = m^{\alpha\beta} \left(\gamma_{\rho\lambda}, \kappa_{\rho\lambda}, \Delta \overset{n}{T} \right) \quad (5.33)$$

mit

$$\Delta \overset{n}{T} = \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} (\bar{T} - T_0) (\theta^3)^n d\theta^3}_{\Delta \overset{n}{T}} - \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} (\overset{o}{T} - T_0) (\theta^3)^n d\theta^3}_{\Delta \overset{o}{T}} = \int_{-h/2}^{h/2} (\underbrace{\bar{T} - \overset{o}{T}}_T) (\theta^3)^n d\theta^3. \quad (5.34)$$

Für den störungsbedingten Temperaturzuwachs T in $\Delta \overset{n}{T}$ machen wir den in (5.24)₁ formulierten Separationsansatz. Somit gehen hier in die aus dem PvV resultierende Gleichung (5.12) - ebenso wie in (5.27) - die unbekannten Zeitfunktionen $\overset{n}{h}(t)$ und $\overset{l}{f}(t)$ ein, wobei

- $\overset{n}{h}(t)$ den Eigenschwingformen und
- $\overset{l}{f}(t)$ den Temperatureigenformen *zugeordnet* ist.

Zusammenfassung:

Bei Anwendung der auf dem Ljapunowschen Stabilitätsbegriff basierenden kinetischen Stabilitätstheorie auf thermoelastisch gekoppelte Schalentragswerke kann man nach Abspaltung der jeweiligen Gleichgewichtsbedingungen des Grund- von denen des Nachbarzustandes mit geeigneten Ansätzen für die Störgrößen, die aus den Bewegungsgleichungen und der damit gekoppelten Wärmeleitgleichung resultierenden Stabilitätsgleichungen schließlich auf die folgende Form bringen:

$$\overset{l}{A} \overset{l}{\dot{f}}(t) + \overset{l}{B} \overset{l}{f}(t) + \overset{l}{C}(t) = 0 \quad \text{für } l = 1, 2, \dots, l_{max}$$

$$\overset{k}{W}_G + \overset{k}{W}_R + \overset{k}{E} = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, k_{max}.$$

(5.35)

Als Unbekannte sind in (5.35) die Zeitfunktionen $\overset{n}{h}(t)$ und $\overset{l}{f}(t)$ enthalten, siehe z.B. (7.48). Liefert die Lösung des *homogenen Zeitdifferenzialgleichungssystems*

(5.35) bei begrenzten Anfangsstörungen (5.16) - die hier als *Anfangsbedingungen* zu berücksichtigen sind - Zeitfunktionen, die für alle Zeiten $t > t_0$ auf Störungen schließen lassen, die gemäß (5.18) innerhalb einer ϵ -Umgebung verbleiben, so spricht man von *Stabilität* im Sinne Ljapunows.

Kapitel 6

Erläuterungen zu den numerischen Berechnungen

Das im Folgenden Gesagte wird mit dem in Abbildung 6.1 dargestellten Ablaufdiagramm veranschaulicht und auf wesentliche Sachverhalte reduziert.

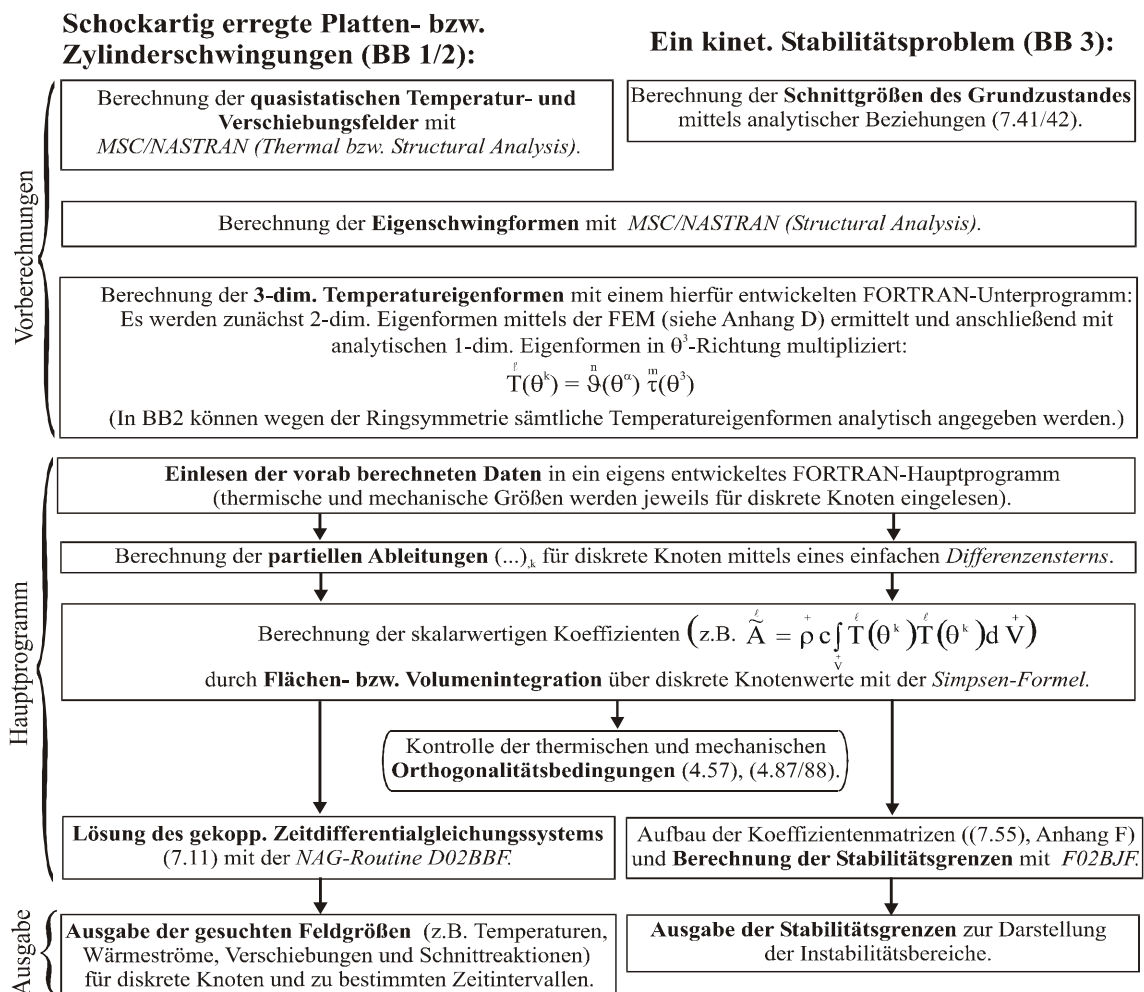


Abbildung 6.1: Chronologischer Ablauf der numerischen Berechnungen

In Zusammenhang mit den in Kapitel 7 behandelten Berechnungsbeispielen sind aufwendige numerische Analysen notwendig. Da es bei allen Anwendungsbeispielen insbesondere darum geht, die konkreten Auswirkungen des Kopplungsterms zu untersuchen, umfasst eine vollständige Lösung in jedem Falle neben einer Lösung der Bewegungsgleichungen auch eine Lösung der Wärmeleitunggleichung. Das sich hieraus ergebende Zeitdifferenzialgleichungssystem (4.97) - und im Rahmen einer Stabilitätsanalyse (5.35) - enthält eine ganze Reihe skalarwertiger Größen (z.B. \tilde{A}^l), deren Berechnung *vorab* erfolgen muss.

Bei den *Vorberechnungen* bedienen wir uns eines kommerziellen FE-Programmes (MSC/NASTRAN), mit dem sowohl thermische, als auch mechanische Probleme - getrennt voneinander - gelöst werden können¹. Wie in (7.7) exemplarisch gezeigt, müssen quasistatische Temperatur- und Verformungsfelder, die wir in den Berechnungsbeispielen 1 und 2 (Abschnitt 7.1/2) verwenden, nicht zu jedem Zeitpunkt t bestimmt werden. Da das *quasistatische Problem linear* und *entkoppelt* ist, ist die Bestimmung *statischer Felder*, z.B. $\check{T}(\theta^k)$ und $\check{v}^3(\theta^\alpha)$, die sich unter *Referenzlasten* einstellen, ausreichend. Zur Berechnung dieser statischen Felder muss das jeweilige Flächentragwerk in *MSC/NASTRAN* vernetzt, und es müssen die Randbedingungen eingegeben werden. Die zum Einsatz kommenden *Finiten Elemente* sind je nach Problemstellung 2-dimensionale 'CQUAD4-Elemente' bzw. 3-dimensionale 'CHEXA8-Elemente'. Die Art und Weise der Vernetzung wird dann im weiteren Verlauf der numerischen Berechnungen beibehalten. In diesem Zusammenhang werden *diskrete Knoten* nicht nur in der Mittelfläche (Abbildung D.1), sondern auch im Schalenraum (Abbildung 6.2) eingeführt.

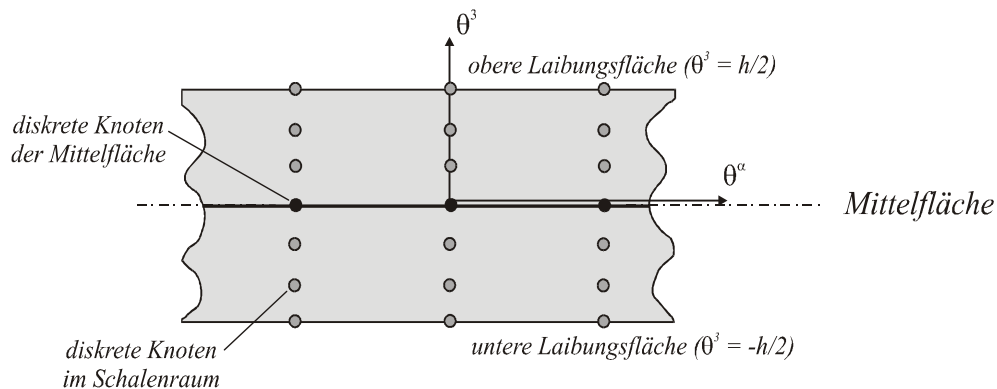


Abbildung 6.2: Diskrete Knoten in einem Bereich des Schalenraumes (Darstellung im Schnitt senkrecht zur Mittelfläche)

Bei *Stabilitätsproblemen* wird nicht das quasistatische Problem, sondern der - im Allgemeinen zeitveränderliche - *Grundzustand* vorab berechnet. Dieser kann im Berechnungsbeispiel 3 (Abschnitt 7.3) auf analytischem Wege gelöst werden; der Einsatz von *MSC/NASTRAN* ist dann erst zur Berechnung der *Eigenschwingformen* notwendig. Die Eigenschwingformen, die wir als Ansatzfunktionen in der Berechnung weiterver-

¹Eine Lösung des *gekoppelten Problems* ist mit *MSC/NASTRAN* nicht möglich.

wenden, werden mittels einer *Modal-Analyse* bestimmt. Da wir in den Anwendungsbeispielen weder *vorgegebene Verschiebungen*, noch *vorgegebene Randlasten* beachten müssen, besteht hier kein Unterschied zwischen *homogenen* und *inhomogenen mechanischen Randbedingungen*, die in *MSC/NASTRAN* für die Mittelfläche formuliert werden. Im Berechnungsbeispiel 2, wo ein zylindrisches Schalentragwerk behandelt wird, ist insbesondere auf die Ausnutzung der *Achsensymmetrie* zu achten, wodurch die Zahl der zu berücksichtigenden Eigenschwingformen erheblich reduziert wird.

Da die 3-dimensionalen Temperatureigenformen nicht von *MSC/NASTRAN* 'geliefert' werden, kommt zu deren Berechnung ein eigens entwickeltes FORTRAN-Unterprogramm zum Einsatz. Abgesehen vom Berechnungsbeispiel 2, wo die Temperaturen von θ^2 unabhängig sind, berechnen sich die *2-dimensionalen Temperatureigenformen* $\overset{n}{v}(\theta^\alpha)$ aus FE-Formulierungen (Anhang C). Anschließend werden sie mit *eindimensionalen Temperatureigenformen* $\overset{m}{\tau}(\theta^3)$ multipliziert, so dass letztendlich den *3-dimensionalen Temperatureigenformen* $\overset{l}{T}(\theta^k)$ *Felder* zugewiesen werden, die je nach Index l (der Temperatureigenform) und Knotennummer n (der diskreten Knoten im Schalenraum) unterschiedliche Temperaturen enthalten:

$$\overset{l}{T}(\theta^k) \quad \longrightarrow \quad \text{FELD-T}(l, n)$$

Das *FORTRAN-Hauptprogramm* liest in einem ersten Schritt sämtliche, vorab berechnete Daten ein. Neben den Temperatureigenformen werden auch quasistatische Größen und die Eigenschwingformen als *Felder* abgespeichert. Nach Bildung *partieller Ableitungen* entstehen weitere Felder, die man durch einheitliche Wahl der *Array-Strukturen* übersichtlich abspeichern kann. So gehört z.B. zu $\overset{n}{v}_{,\alpha\beta}^k(\theta^\rho)$ eine Vielzahl von Indizes, für die im Rahmen einer sinnvoll strukturierten Programmierung eine einheitliche Systematik gewählt werden muss. In diesem Zusammenhang erweist sich die *Indexschreibweise* als überaus nützlich bei der Programmierung.

Jetzt können die in den Zeitdifferentialgleichungssystemen benötigten *skalarwertigen Koeffizienten* bestimmt werden. Die *Flächen-* bzw. *Volumenintegrationen* erfolgen dann über diskrete Knotenwerte. Programmtechnisch bedeutet dies: Anstelle von Integrationen werden (näherungsweise) Summationen durchgeführt. Die Güte der Approximationen richtet sich dann nach der *Diskretisierung* - also der Anzahl und Verteilung der verwendeten Knoten. Bevor es weiter geht, werden nun die *Orthogonalitätsbedingungen* (4.57) und (4.87/88) für die Eigenformen kontrolliert. Sie liefern ein einfach zu handhabendes Kontrollinstrument, da ihre Erfüllung davon abhängt, ob die Vorberechnungen - insbesondere die partiellen Ableitungen und die Integrationen - korrekt durchgeführt werden.

In den Berechnungsbeispielen 1 und 2 müssen dann die verbliebenen *Zeitdifferentialgleichungssysteme* des *gekoppelten Problems* unter Beachtung der *Anfangsbedingungen* numerisch gelöst werden. Hierzu bedienen wir uns der kommerziellen *NAG-Routine D02BBF* - basierend auf dem *Runge-Kutta-Verfahren*. Als Lösungen ergeben sich die Zeitfunktionen $\overset{l}{f}(t)$ und $\overset{n}{h}(t)$. Letztendlich können dann die gesuchten Größen des Momentanzustandes (Verformungen, Schnittgrößen, Temperaturen usw.) aus ihren

quasistatischen und dynamischen Anteilen 'zusammengebaut' werden. So berechnet sich die gesuchte Temperaturverteilung in Berechnungsbeispiel 1 zu

$$T(\theta^k, t) = T_0 + \check{T}(\theta^k) g(t) + \sum_l^{l_{max}} \left[T(\theta^k)^l f(t) \right]. \quad (6.1)$$

Die *Stabilitätsgrenzen* zwischen *stabilen* und *instabilen* Belastungskombinationen ergeben sich in Abschnitt 7.3, wenn die Bedingung (7.55) erfüllt wird. (7.55) repräsentiert ein *Eigenwertproblem*, wenn man beispielsweise zur Berechnung der *Stabilitätsgrenzen* in Abbildung 7.15 für variable Werte $\frac{\Omega}{2\omega}$ den zugehörigen *dynamischen Lastparameter* κ_{dyn} sucht, für den die Determinante der *Koeffizientenmatrix* \mathbf{X}_T - oder alternativ \mathbf{X}_{2T} - verschwindet. Wir bedienen uns in diesem Zusammenhang der *NAG-Routine F02BJF*.

Verwendete Hard- und Software:

- Kommerzielles FE-Programm: *MSC/NASTRAN (Version 70.7)* mit dem Pre- und Postprozessor *MSC/PATRAN (Version 2000 r2)*.
- Die selbst programmierten FORTRAN-Programme greifen zu auf: *NAG FORTRAN77 Libraries (Mark 17-19)*.
- Alle Berechnungen werden auf dem Großrechner der Universität² durchgeführt: Prozessor-Ausstattung: *32 MIPS R10000*.

²Universität der Bundeswehr, Neubiberg.

Kapitel 7

Berechnungsbeispiele

Die ausgewählten Berechnungsbeispiele (BB) sind bewußt so gewählt, dass Kontrollrechnungen durchführbar sind: Ausgangspunkte der Analysen sind jeweils bereits in der Literatur ([26], [20], [50]) behandelte Anwendungsbeispiele. So wird versucht, die hier formulierten Theorien und Lösungsmethoden zu verifizieren. Bei allen drei Anwendungsbeispielen wird insbesondere auf die Untersuchung derjenigen Phänomene ein ganz besonderes Augenmerk gerichtet, die aus dem *elastischen Kopplungsterm in der Wärmeleitgleichung* resultieren. Plastisches Materialverhalten mit den damit zusammenhängenden irreversiblen Deformationen wird hier nicht untersucht.

Das Material der Flächentragwerke ist in allen drei Fällen *Stahl*. Die angesetzten Materialeigenschaften sind aber nicht immer identisch; das erklärt sich aus der Tatsache, dass - wie oben erwähnt - Anwendungsbeispiele aus unterschiedlichen Veröffentlichungen herangezogen werden.

Die verwendeten Einheiten (N , m , sec , W , ...) sind *SI-Einheiten*.

$msec$ steht für Millisekunden, also $10^{-3}sec$.

7.1 Platte unter bereichsweisem Temperaturschock (BB1)

In [26] werden die Auswirkungen des Kopplungsterms für eine gelenkig gelagerte Platte unter *sinusförmigem Temperaturschock* an der Oberfläche analysiert. Da die gewählten Temperaturreandbedingungen auch zu einer sinusförmigen Temperaturverteilung in der Mittelfläche führen, gelingt eine numerische Lösung des gekoppelten Problems mit relativ geringem Aufwand; zweidimensionale Temperatureigenformen $\vartheta^n(\theta^\alpha)$ werden dann nicht benötigt.

Bei der hier behandelten Platte unter *bereichsweisem Temperaturschock*, siehe Abbildung 7.1, können vorab noch keinerlei Aussagen über die sich einstellenden Temperaturfelder im Inneren gemacht werden. Zur Lösung der (dynamischen)

Wärmeleitgleichung - die mit den Bewegungsgleichungen gekoppelt ist - müssen also vorab die Temperatureigenformen $\hat{T}(\theta^k)$ bestimmt werden, die sich gemäß (4.74) multiplikativ aus ein- und zweidimensionalen Temperatureigenformen zusammensetzen. Der zu betreibende numerische Aufwand ist um ein Vielfaches höher als bei dem Berechnungsbeispiel in [26].

Um das auf der Verwendung von dreidimensionalen Temperatureigenformen basierende Lösungskonzept kontrollieren zu können, werden die Ergebnisse aus einer entkoppelten Analyse mit Ergebnissen aus einem kommerziellen FE-Programm (*MSC/NASTRAN (Thermal Analysis)*) verglichen. Es wird gezeigt, dass schon mit einer relativ geringen Anzahl von Eigenformen eine gute Approximation der sich einstellenden zeitveränderlichen Temperaturfelder in der Platte gelingt, siehe Abbildung 7.3/4.

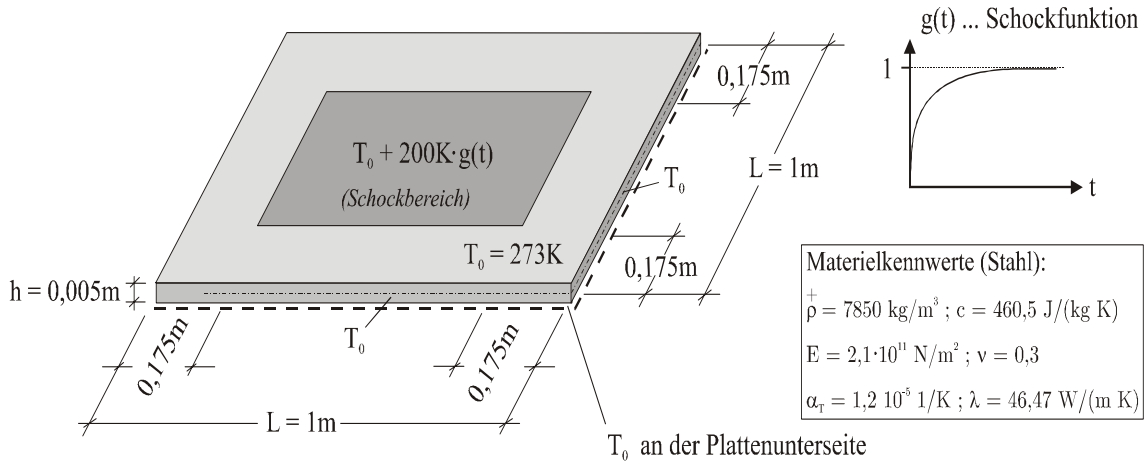


Abbildung 7.1: BB 1: System

Wie in Abbildung 7.1 dargestellt, wird eine elastische Stahlplatte mit konstanter Dicke untersucht, die in einem begrenzten Bereich ihrer Oberfläche schockartig um $200K$ erwärmt wird:

$$T_{(o)} = T_0 + 200K \cdot g(t); \quad \text{Schockfunktion: } g(t) = 1 - e^{-100t}. \quad (7.1)$$

In der Praxis ist eine solche bereichsweise Erwärmung einer Platte denkbar bei plötzlichem Aufbringen von heißem Gas. Für alle übrigen Begrenzungsflächen wird die Temperatur des Ausgangszustandes $T_0 = 273K$ konstant gehalten. Temperaturrandbedingung sind somit zu jedem Zeitpunkt der Berechnung bekannt. Für die in Abbildung 7.1 aufgeführten Materialeigenschaften wird näherungsweise angenommen, dass sie Konstanten sind. Eine mögliche Temperaturveränderlichkeit dieser Kennwerte wird in den folgenden Berechnungsbeispielen nicht beachtet.

An dem Flächentragwerk, das an seinen Rändern gelenkig gelagert ist, greifen mit Ausnahme der Lagerkräfte keine äußeren mechanischen Kräfte an ($p^k = 0$). Bei dem hier untersuchten thermomechanischen Prozess wird dem Gesamtsystem Energie also lediglich in Form von Wärme, nicht aber in Form von Arbeit aus seiner Umgebung zugeführt. Wie wir noch sehen werden, resultieren aus dieser Zufuhr von thermischer Energie neben Änderungen der Temperaturfelder im Inneren des Flächentragwerks

auch temperaturbedingte Deformationen, die wegen der sehr schnellen (schockartigen) Belastungszunahme zu Plattenschwingungen führen. Bei der Untersuchung dieser Prozesse werden wir uns insbesondere den Auswirkungen des thermoelastischen Kopplungsterms zuwenden, wobei auch der Einfluss von Nichtlinearitäten (im Kopplungsterm) diskutiert wird. Da *große Verformungen* hier von vornherein ausgeschlossen werden, werden Nichtlinearitäten in den Bewegungs- sowie in den konstitutiven Gleichungen nicht berücksichtigt.

Mit Blick auf die (doppelte) Symmetrie von System und Belastung in Abbildung 7.1 kann man anstelle des ursprünglichen auch ein Ersatz-System ansetzen, das in Abbildung 7.2 dargestellt ist; an den Schnitten müssen dann die 'passenden' Randbedingungen formuliert werden. Durch die Ausnutzung von Symmetrie gelingt so eine erhebliche Reduktion der Zahl der diskreten Knoten bei den numerischen Berechnungen, um konvergierende Ergebnisse zu erzielen.

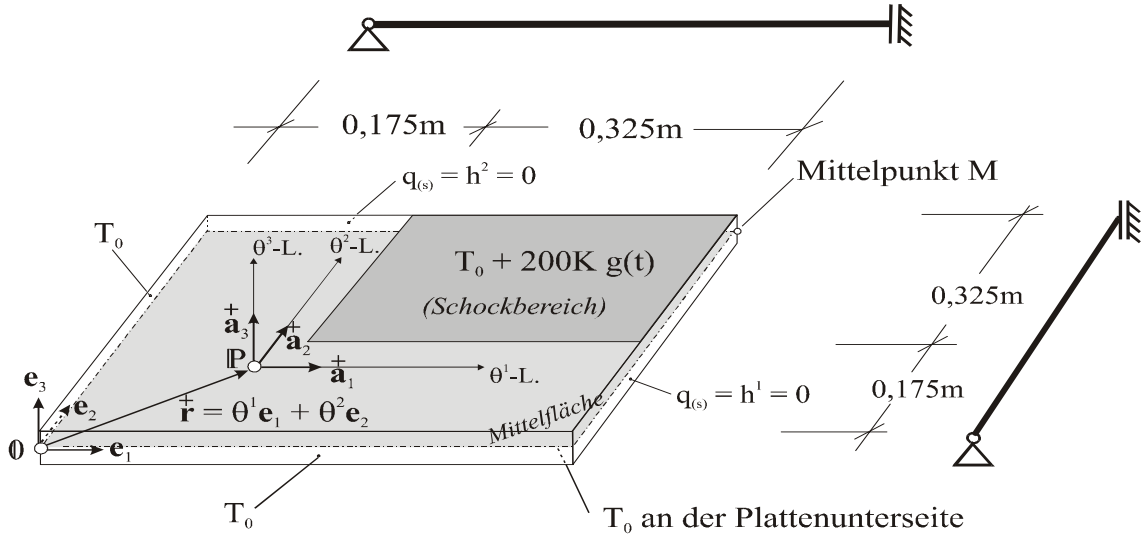


Abbildung 7.2: BB 1: Ersatzsystem

Da wir es mit einem ebenen Flächentragwerk zu tun haben, ist hier die formelmäßige Beschreibung der Geometrie ganz besonders einfach: Die Krümmungstensoren verschwinden ($\overset{+}{b}{}^\beta_\alpha = 0$) und die Basisvektoren des Ausgangszustandes sind in jedem Punkt der Mittelfläche - und auch im Schalenraum - identisch mit denen des Inertialsystems: $\overset{+}{a}_k = \overset{+}{g}_k = \mathbf{e}_k$. Die Christoffelsymbole verschwinden ($\overset{+}{\Gamma}{}^\rho_{\alpha\beta} = 0$) und bei kovarianten Ableitungen verbleiben lediglich die partiellen Ableitungen: $(\dots)|_\alpha = (\dots)_{,\alpha}$. Somit ergeben sich im Rahmen einer in den Verschiebungskomponenten v^k linearisierten Theorie die Krümmungsänderungen in der Platte aus (3.38) und (B.21) zu

$$\kappa_{\rho\lambda} = \left(\Phi_3^\lambda \right)_{,\rho} = -v^3_{,\lambda\rho} . \quad (7.2)$$

Ausgehend von den Bewegungsgleichungen (4.1) können die speziellen Gleichungen der Platte leicht aufgestellt werden. Ohne die Einflüsse aus Drehträgheit und im Rahmen einer Theorie kleiner Verformungen gilt:

$$n^{\alpha 3}_{,\alpha} = \overset{+}{m} \ddot{v}^3 ; \quad m^{\alpha\beta}_{,\alpha} - n^{\beta 3} = 0 . \quad (7.3)$$

Wir benötigen nun noch *konstitutive Gleichungen für die Biege- und Drillmomente*, die im Rahmen der hier formulierten thermoelastischen Schalentheorie sowohl von Krümmungs-, als auch von Temperaturänderungen abhängen: Da sich die Krümmungstensoren zu Null ergeben, besteht hier kein Unterschied zwischen der 2. bzw. 3.Approximation:

$$m^{\alpha\beta} = BG^{\alpha\beta\rho\lambda}\kappa_{\rho\lambda} - \gamma^*\Delta\overset{1}{T}\delta^{\alpha\beta}. \quad (7.4)$$

Man erkennt deutlich den verformungs- und den temperaturbedingten Anteil in $m^{\alpha\beta}$. Die *gekoppelte Wärmeleitgleichung*, die sich aus dem 1.Hauptsatz nach Einsetzen der Zustandsgleichungen ergibt, lässt sich hier aus (3.68) folgendermaßen ableiten:

$$\overset{+}{\rho c}\overset{\bullet}{T} + h^k_{,k} - \underbrace{\gamma^*T\theta^3 \left(\overset{\bullet}{v}^3_{,11} + \overset{\bullet}{v}^3_{,22} \right)}_{\text{Kopplungsterm}} = 0 \quad \text{mit} \quad h^k = -\lambda T_{,k}. \quad (7.5)$$

Da sowohl die Temperatur T , als auch die Verschiebungsableitungen $\overset{\bullet}{v}^3_{,\alpha\alpha}$ unbekannte Größen darstellen, gehen in den Kopplungsterm Nichtlinearitäten ein. In Abschnitt 4.1.1 haben wir in diesem Zusammenhang von '*thermo-mechanischen Nichtlinearitäten*' gesprochen und bereits angemerkt, dass die hieraus resultierenden Effekte bei kleinen Temperaturänderungen ($T - T_0$) vernachlässigt werden können. Infolge des Temperaturschocks kommt es hier - zumindest in einem begrenzten Bereich des Tragwerks - zu deutlichen Temperaturerhöhungen von bis zu $200K$, '*thermo-mechanische Nichtlinearitäten*' werden deshalb in der numerischen Berechnung mitgenommen, um ihren Einfluss abschätzen zu können.

Mit einer Aufspaltung der Unbekannten v^3 und T in einen quasistatischen und einen dynamischen Anteil ($v^3 = \check{v}^3 + \breve{v}^3$; $T = \check{T} + \breve{T}$) gelingt - wie in Abschnitt 4.4 beschrieben - die Abspaltung der *Differenzialgleichungen des quasistatischen Problems (im Gebiet)*:

$$\breve{n}_{,\alpha}^{\alpha 3} = 0; \quad \breve{m}_{,\alpha}^{\alpha\beta} - \breve{n}^{\beta 3} = 0; \quad \breve{T}_{,kk} = 0 \quad (\sum k!). \quad (7.6)$$

Gemäß Kapitel 6, wird das (entkoppelte) quasistatische Problem vorab unter Anpassung an die inhomogenen Randbedingungen mit einem kommerziellen FE-Programm gelöst. Da es sich hierbei um ein *lineares Problem* handelt, hängen die quasistatischen Lösungen linear von der Schockfunktion (7.1)₂ ab, es muss also gelten:

$$\breve{T}(\theta^k, t) = T_0 + \breve{T}(\theta^k)g(t) \quad \text{und} \quad \breve{v}^3(\theta^\alpha, t) = \breve{v}^3(\theta^\alpha)g(t). \quad (7.7)$$

Wie schon in Kapitel 6 erläutert, muss also das quasistatische Problem nicht zu jedem Zeitpunkt der Berechnung gelöst werden, sondern es ist ausreichend, z.B. für eine *Referenztemperatur* von $T_{(o)} = T_0 + 200K$ statische Berechnungen durchzuführen und die Felder $\breve{T}(\theta^k)$ und $\breve{v}^3(\theta^\alpha)$ zu bestimmen.

Zur Lösung des verbliebenen dynamischen Problems benötigen wir dann noch Eigenformen als Ansatzfunktionen für die in (4.56)₁ und (4.65)₁ formulierten Separationsansätze. Diese seien hier noch einmal dargestellt (Ansätze für \breve{v}^α werden nicht

benötigt):

$$\tilde{v}^3(\theta^\alpha, t) = \sum_{n=1}^{n_{max}} \left[\tilde{v}^3(\theta^\alpha) \tilde{h}(t) \right] ; \quad \tilde{T}(\theta^k, t) = \sum_{l=1}^{l_{max}} \left[\tilde{T}(\theta^k) \tilde{f}(t) \right] . \quad (7.8)$$

Zur Bestimmung der Eigenschwingformen und der dazugehörigen Eigenkreisfrequenzen $\tilde{\omega}$ bedienen wir uns eines kommerziellen FE-Programms. Wie schon weiter oben angedeutet, gestaltet sich die Ermittlung der dreidimensionalen Temperatureigenformen weitaus aufwendiger. Diese lassen sich multiplikativ in ein- und zweidimensionale Anteile aufspalten:

$$\tilde{T}^l(\theta^k) = \tilde{\tau}^m(\theta^3) \tilde{\vartheta}^n(\theta^\alpha) . \quad (7.9)$$

Auf die konkrete Berechnung von $\tilde{\tau}^m(\theta^3)$ und $\tilde{\vartheta}^n(\theta^\alpha)$ wird im Anhang C und D ausführlich eingegangen. Gemäß $(C.4)_{1/2}$ existieren dann für die eindimensionalen Temperatureigenformen $\tilde{\tau}^m(\theta^3)$ bei vorgegebenen Temperaturrandbedingungen an den Laibungsflächen analytische Funktionen:

$$\tilde{\tau}^m(\theta^3) = \cos\left(\frac{m\pi}{h}\theta^3\right) \quad (m = 1, 3, \dots); \quad \tilde{\tau}^m(\theta^3) = \sin\left(\frac{m\pi}{h}\theta^3\right) \quad (m = 2, 4, \dots) . \quad (7.10)$$

Die zweidimensionalen Temperatureigenformen $\tilde{\vartheta}^n(\theta^\alpha)$ müssen auf numerischem Wege - mittels der FEM - bestimmt werden. Die mit den thermischen Randbedingungen des Ersatzsystems, siehe Abbildung 7.2, kompatiblen Eigenformen $\tilde{\vartheta}^n(\theta^\alpha)$ sind in Abbildung D.2 veranschaulicht.

Sind neben den quasistatischen Lösungen auch die Eigenformen bekannt, so gelingt es letztendlich das dynamische Problem durch das gekoppelte Zeitdifferentialgleichungssystem (4.97) auszudrücken. Wertet man darin die Arbeitsausdrücke unter Ausnutzung der Orthogonalitätsbedingungen (4.57) aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{A}^l \dot{\tilde{f}}(t) + \tilde{B}^l \tilde{f}(t) + \tilde{C}^l(t) &= \tilde{D}^l \dot{\tilde{g}}(t) & (l = 1, 2, \dots, l_{max}) \\ \underbrace{\left(\tilde{\omega} \right)^2 \tilde{h}(t) + \sum_{l=1}^{l_{max}} \left[\tilde{L}^l \tilde{f}(t) \right]}_{\tilde{W}_G^n} + \underbrace{\left(\tilde{h}(t) + \tilde{N} \dot{\tilde{g}}(t) \right)}_{\tilde{E}^n} &= 0 & (n = 1, 2, \dots, n_{max}) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Aus Übersichtsgründen haben wir sämtliche skalarwertigen Koeffizienten des Zeitdifferentialgleichungssystems $(\tilde{A}^l, \tilde{B}^l, \dots, \tilde{N}^n)$ - die vorab berechnet werden müssen - im Anhang G abgedruckt, siehe (G.2). In Anhang G findet sich auch der Kopplungsterm $\tilde{C}^l(t)$, der sich aufgrund der Mitnahme 'thermo-mechanischer Nichtlinearitäten' in der Berechnung aus einer ganzen Reihe unterschiedlicher Terme zusammensetzt, siehe (G.1).

Das gekoppelte Zeitdifferentialgleichungssystem (7.11) wird hier mittels des *Runge-Kutta-Verfahrens* gelöst. Hierzu ist noch die Kenntnis der Anfangsbedingungen für

die unbekannten Zeitfunktionen $f^l(t)$ ($l = 1, 2, \dots, l_{max}$) und $h^n(t)$ ($n = 1, 2, \dots, n_{max}$) notwendig. Diese lassen sich, wie gezeigt wird, aus den *Anfangsbedingungen für die Feldvariablen*

$$v^3(\theta^\alpha, t = 0) = 0, \quad \dot{v}^3(\theta^\alpha, t = 0) = 0, \quad T(\theta^k, t = 0) = T_0 \quad (7.12)$$

berechnen. Dann muss mit (7.7) und (7.8) gelten:

$$\begin{aligned} v^3(\theta^\alpha, t = 0) &= \check{v}^3(\theta^\alpha) \underbrace{g(t = 0)}_{=0} + \sum_{n=1}^{n_{max}} \left[\check{v}^3 h^n(t = 0) \right] = 0 \\ \dot{v}^3(\theta^\alpha, t = 0) &= \check{v}^3(\theta^\alpha) \dot{g}(t = 0) + \sum_{n=1}^{n_{max}} \left[\check{v}^3 \dot{h}^n(t = 0) \right] = 0 \\ T(\theta^k, t = 0) &= \underbrace{T_0 + \check{T}(\theta^\alpha)g(t = 0)}_{\text{quasistatisch}} + \underbrace{\sum_{l=1}^{l_{max}} \left[\check{T} f^l(t = 0) \right]}_{\text{dynamisch}} = T_0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Die Gleichungen (7.13)_{1/3} können mit den folgenden Anfangsbedingungen für die Zeitfunktionen erfüllt werden:

$$h^n(t = 0) = 0 \quad (n = 1 \dots n_{max}) \quad \text{und} \quad f^r(t = 0) = 0 \quad (r = 1 \dots r_{max}). \quad (7.14)$$

Zur Bestimmung der Anfangsbedingungen für $\dot{h}^n(t)$ multipliziert man (7.13)₂ mit $\check{v}^3(\theta^\alpha)$ und integriert anschließend über die Mittelfläche. Unter Beachtung der Orthogonalitätsbedingung (4.57)₂ muss dann gelten:

$$\dot{h}^n(t = 0) = -\check{N}^n \dot{g}(t = 0) \quad (n = 1 \dots n_{max}). \quad (7.15)$$

Angaben zur Diskretisierung:

- Anzahl der Knoten in der Mittelfläche: $11 \cdot 11 = 121$; in Dickenrichtung: 21 \Rightarrow Gesamtzahl der Knoten: $121 \cdot 21 = 2541$.
- Anzahl der Temperatureigenformen in der Mittelfläche: 15 ; in Dickenrichtung: 10 $\Rightarrow l_{max} = 15 \cdot 10 = 150$.
- Anzahl der Eigenschwingformen: $n_{max} = 15$.
- Gesamtzahl der unbekannten Zeitfunktionen und der Gleichungen in (7.11): $l_{max} + n_{max} = 165$.

7.1.1 Diskussion der Ergebnisse

Hier werden Ergebnisse aus drei unterschiedlichen *Berechnungsvarianten* verglichen. Wir unterscheiden zwischen einer Lösung von (7.11)

1. ohne Beachtung des Kopplungsterms, $\dot{\tilde{C}}(t) = 0$: *entkoppelte Analyse*;
2. mit Beachtung linearer Anteile im Kopplungsterm, siehe (G.1): *linear gekoppelte Analyse*; und
3. mit Beachtung aller - linearer sowie nichtlinearer - Anteile im Kopplungsterm, siehe (G.1): *nichtlinear gekoppelte Analyse*.

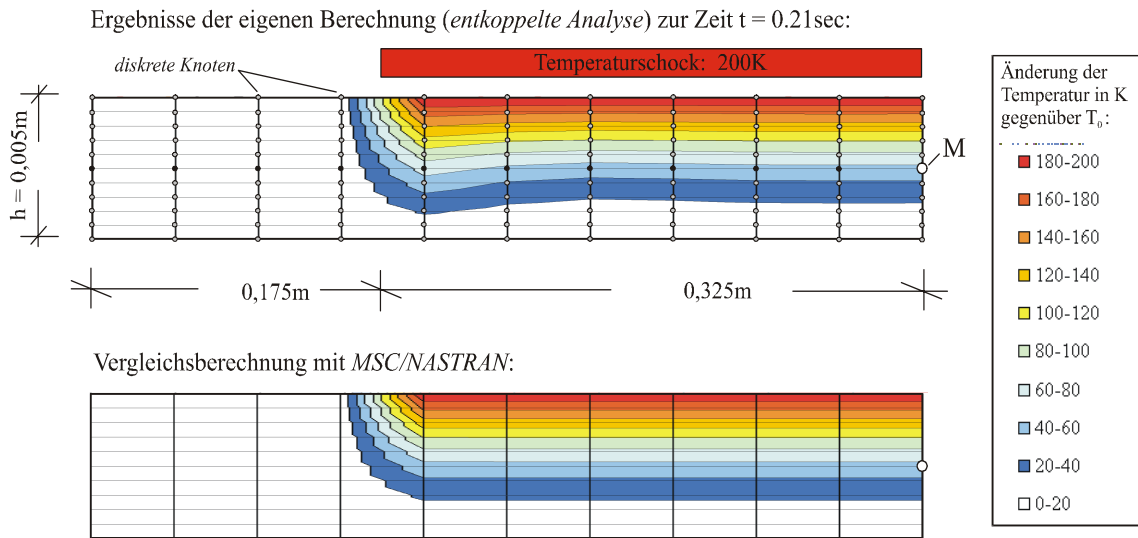


Abbildung 7.3: BB 1: Temperaturänderungen in der Symmetrieebene ($\theta^1 = L/2$) zur Zeit $t = 0.21\text{sec}$

In einem ersten Schritt wird kontrolliert, ob mit den verwendeten dreidimensionalen Temperatureigenformen die sich tatsächlich in der Platte einstellenden Temperaturfelder abgebildet werden können. Hierzu vergleichen wir eigene Ergebnisse aus einer *entkoppelten Analyse* mit denen aus einer unabhängigen Vergleichsrechnung mit *MSC/NASTRAN (Transient Thermal Analysis)*: In Abbildung 7.3 sind Temperaturänderungen gegenüber dem Ausgangszustand in der Symmetrieebene dargestellt, die sich zum Zeitpunkt $t = 0.21\text{sec}$ einstellen. Die Plattendicke ist hier gegenüber der Längenabmessung stark überhöht dargestellt. Es zeigt sich, dass mit den insgesamt 150 Temperatureigenformen schon eine recht gute Annäherung an die Vergleichsergebnisse gelingt. Im Schockbereich erkennt man deutlich, wie sich infolge der Wärmeleitung die thermische Energie von der oberen, hin zur unteren Laibungsfläche ausbreitet. Die ausgezeichnete Wärmeleitfähigkeit von Metall (hier Stahl) zeigt sich auch in Abbildung 7.4, wo der zeitabhängige Temperaturanstieg im Mittelpunkt der Platte veranschaulicht ist. Schon 0.03sec nach Aufbringen des Temperaturschocks erkennt man eine erste, geringfügige Temperaturerhöhung; nach 0.21sec liegt diese bereits bei etwa 54.3K . Die Ergebnisse der eigenen Berechnung decken sich nahezu mit denen aus *MSC/NASTRAN*.

Bei den Temperaturfeldern sind hier Unterschiede zwischen einer entkoppelten und einer gekoppelten Analyse praktisch nicht feststellbar. Gründe hierfür werden im

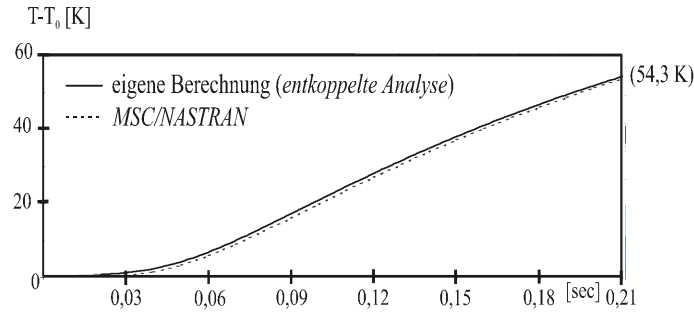


Abbildung 7.4: BB 1: Temperaturänderung im Mittelpunkt M während $t = 0..0.21\text{sec}$

Folgendes dargestellt: Die infolge des elastischen Kopplungsterms auftretenden Temperaturänderungen sind in der Regel minimal¹. Da im Kopplungsterm, siehe (7.5), die Krümmungsgeschwindigkeiten mit θ^3 multipliziert werden, ist mit maximalen (kopplungsbedingten) Temperaturänderungen an den Laibungsflächen des Flächentragwerks zu rechnen. Solche Temperaturänderungen an den Laibungsflächen sind hier aber - wegen der Temperaturrendbedingungen - von vornherein ausgeschlossen.

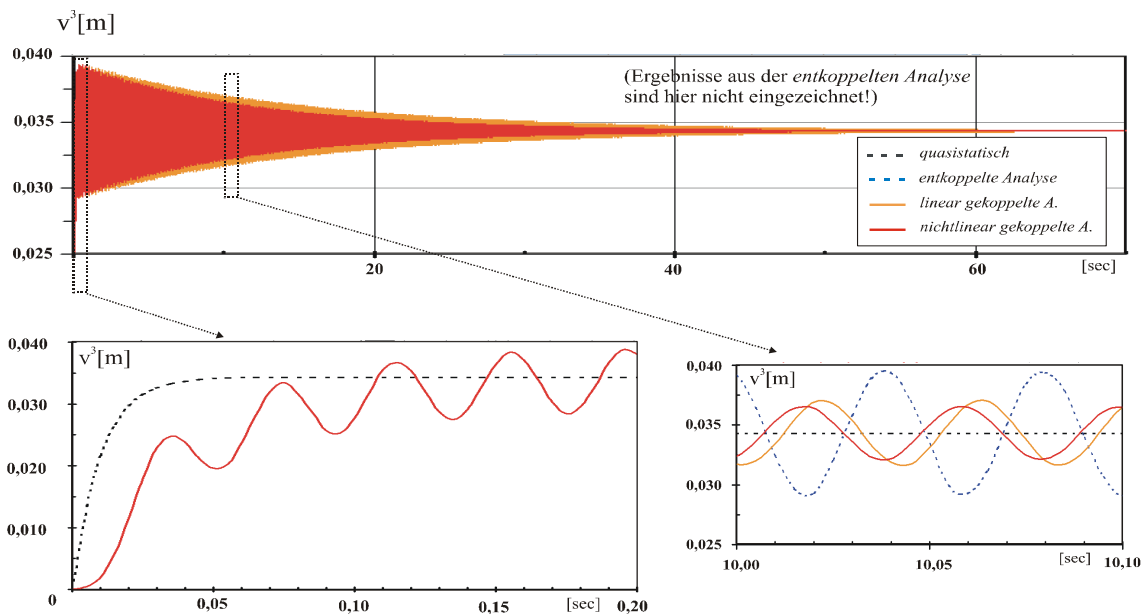


Abbildung 7.5: BB 1: Durchbiegung im Mittelpunkt M während $t = 0..70\text{sec}$

In Abbildung 7.5 ist für unterschiedliche Berechnungsvarianten die Durchbiegung der Mittelfläche im Punkt M dargestellt. Wir erkennen, dass sich die Platte unmittelbar nach Aufbringen des Temperaturschocks nach oben durchbiegt und anschließend um ihre statische Ruhelage schwingt. Unterschiede zwischen einer gekoppelten und einer entkoppelten Analyse sind während der ersten 0.2sec (Abbildung 7.5, links unten) noch nicht zu erkennen. Mit fortlaufender Zeit ändert sich dies allerdings, so bemerkt

¹So zeigen die Ergebnisse zu Berechnungsbeispiel 2 in Abbildung 7.11 kopplungsbedingte Temperaturänderungen an den Laibungsflächen von unter 0.4K

man bereits nach 10 Sekunden (Abbildung 7.5, rechts unten), dass der Kopplungseffekt zum einen eine Verringerung der Schwingungsamplituden und zum anderen eine Phasenverschiebung bewirkt. Diese Phänomene, die mit einer schwachen Dämpfung² vergleichbar sind, werden bei Mitnahme der Nichtlinearitäten im Kopplungsterm noch verstärkt. Das ist aber nicht verwunderlich, da der Kopplungsterm in (7.5) mit der tatsächlichen Temperatur T in der Regel höhere Werte annimmt, als wenn man - bei Linearisierung - anstelle von T die Anfangstemperatur T_0 setzen würde.

Die dämpfende Wirkung des elastischen Kopplungseffekts, die auch in [26] erkannt wird, bewirkt schließlich, dass die Plattenschwingungen nach etwa einer Minute vollständig abklingen. Im Rahmen einer entkoppelten Analyse würden die elastischen Schwingungen mit unveränderter Amplitude 'ewig lange' weiterschwingen.

Vom Standpunkt der Thermodynamik aus betrachtet ist die Irreversibilität der elastischen Plattenschwingungen nicht verwunderlich, da wegen der Wärmeleitung die Dissipationsleistung in (2.48) positive Werte annimmt. Die innerhalb der Platte ablaufenden thermomechanischen Prozesse, bei denen Phänomene der Wärmeleitung und elastische Formänderungen miteinander gekoppelt sind, sind also gemäß dem 2. Hauptsatz irreversibel, deshalb können auch die Schwingungen - *für sich* betrachtet - nicht mehr reversibel sein, sondern müssen abklingen.

7.2 Zylinder unter schockartiger Druckbeanspruchung an der Innenwand (BB2)

Die Vorgehensweise zur Lösung ist hier prinzipiell die gleiche, wie im Berechnungsbeispiel 1, weshalb auf die Erläuterung all derjenigen Beziehungen verzichtet wird, die sich analog zum Abschnitt 7.1 ergeben. Nichtlinearitäten - weder in Zusammenhang mit *großen Verformungen*, noch im Kopplungsterm - werden hier nicht betrachtet. Dies ist mit Blick auf die erzielten Ergebnisse gerechtfertigt, so ergeben sich hier nur geringfügige Temperaturänderungen gegenüber dem Ausgangszustand.

Analog zu [20] soll hier ein Zylinder analysiert werden, bei dem der Innendruck plötzlich ansteigt, seinen Maximalwert von 80bar nach 0.02 Millisekunden (*msec*) erreicht, um dann wieder auf Null zurückzugehen:

$$p^3(t) = -80 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot g(t); \quad \text{Schockfunktion: } g(t) = 1.441 \cdot 10^5 \cdot t \cdot e^{-52414 \cdot t}. \quad (7.16)$$

Das negative Vorzeichen hängt mit der Richtung des Normalenvektors \vec{a}_3 der Mittelfläche zusammen, siehe Abbildung 7.6. Im Gegensatz zu dem vorab behandelten Berechnungsbeispiel wird also hier ein Flächentragwerk nicht einer thermischen, sondern einer mechanischen Belastung ausgesetzt. Wie man sich leicht vorstellen kann, werden durch diese schockartige Beanspruchung, wie sie z.B. infolge einer *Explosion in einem Rohr* auftreten kann, *achsensymmetrische Schwingungen* verursacht. Aufgrund

²Tauchert spricht in diesem Zusammenhang von *thermoelastischer Dämpfung*, siehe [32].

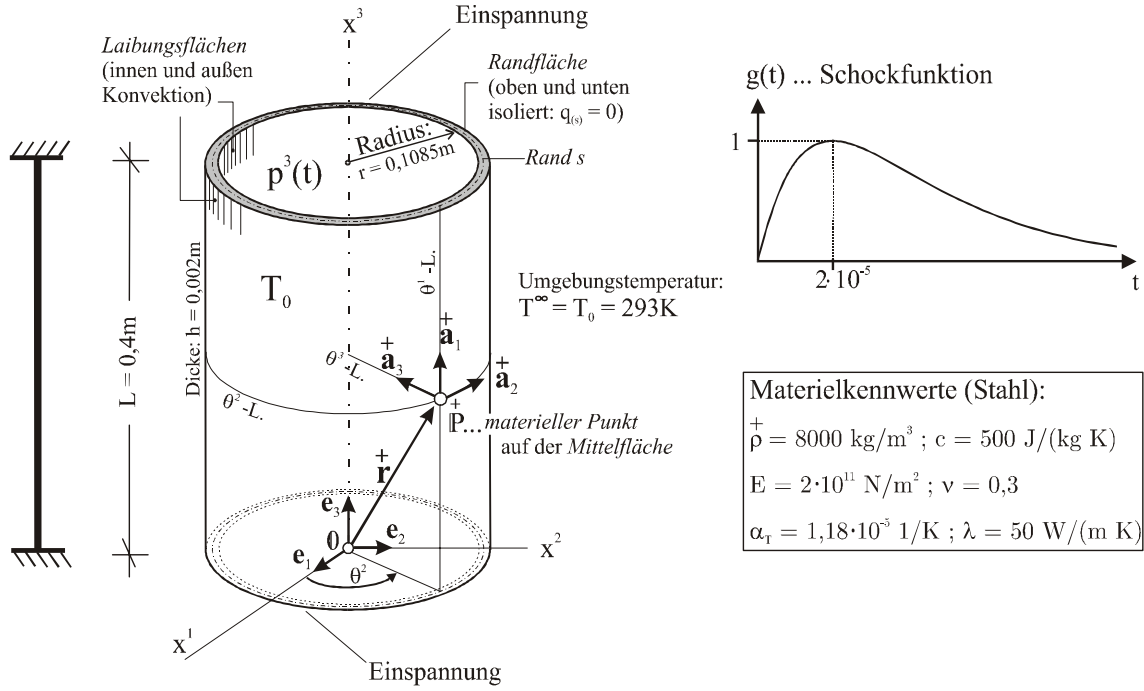


Abbildung 7.6: BB 2: System

des Kopplungsterms in der Wärmeleitgleichung verursachen diese Schwingungen zeit- und ortsveränderliche Temperaturfelder, auf die im Folgenden noch genauer eingegangen wird. Der an seinen Rändern eingespannte und wärmeisolierte Zylinder hat im Ausgangszustand die Temperatur $T_0 = 293\text{K}$. An seinen Laibungsflächen ist *konvektiver Wärmeübergang* möglich: Das umgebende Medium, das man sich gasförmig vorstellen kann, hat ebenfalls die Temperatur $T^\infty = 293\text{K}$, die sich während der Berechnung nicht ändern soll. Die *Wärmeübergangskoeffizienten* an den Laibungsflächen ergeben sich gemäß [20] zu

$$\begin{aligned} \alpha_{(o)} &= 1000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} & \text{an der Innenseite } (\theta^3 = h/2) & \text{ und} \\ \alpha_{(u)} &= 200 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} & \text{an der Außenseite } (\theta^3 = -h/2). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Ein weiterer bedeutender Unterschied zu dem in Abschnitt 7.1 behandelten Flächentragwerk besteht darin, dass wir es hier mit einer gekrümmten Schale zu tun haben, weshalb in die kovarianten Ableitungen und die konstitutiven Gleichungen auch krümmungsbedingte (zusätzliche) Terme eingehen. Ausgehend von der Geometrie des in Abbildung 7.6 dargestellten Zylinders, die durch den *Richtungsvektor*

$$\mathbf{r}(\theta^\alpha) = x^k(\theta^\alpha) \mathbf{e}_k \quad \text{mit} \quad x^1 = r \cos \theta^2, \quad x^2 = r \sin \theta^2, \quad x^3 = \theta^1 \quad (7.18)$$

beschrieben wird, können die Basisvektoren, Metrik- und Krümmungstensoren, sowie alle weiteren - davon abhängigen - Größen der Schalentheorie abgeleitet werden.

Wegen der *Achsensymmetrie* von System und Beanspruchung verschwinden v^2 -Verschiebungen, Drillmomente, Schubkräfte sowie Wärmeströme in Umfangsrichtung:

$$v^2 = m^{12} = n^{12} = h^2 = 0. \quad (7.19)$$

Gleiches gilt für alle partiellen Ableitungen in 2-Richtung: $(\dots)_{,2} = 0$. Die unbekannten Temperatur- und Verformungsfelder hängen dann nicht mehr von der θ^2 -Koordinate ab: $T = T(\theta^1, \theta^3, t)$; $v^3 = v^3(\theta^1, t)$ usw.

Die *linearisierten Bewegungsgleichungen* ergeben sich hier aus (4.1) zu

$$n_{,1}^{11} = \overset{+}{\rho} h \overset{\bullet}{v}^1 ; \quad n^{23} = 0 ; \quad m_{,11}^{11} + n^{22} r + p^3 = \overset{+}{\rho} h \overset{\bullet}{v}^3 . \quad (7.20)$$

Die *konstitutiven Gleichungen der 2.Approximationsstufe* lauten:

$$\begin{aligned} n^{11} &= D \left(v_{,1}^1 - \frac{\nu}{r} v^3 \right) + \frac{B}{r} v_{,11}^3 & -\gamma^* \Delta \overset{0}{T} + \frac{\gamma^*}{r} \Delta \overset{1}{T} \\ n^{22} &= \frac{D}{r^2} \left(\nu v_{,1}^1 - \frac{1}{r} v^3 \right) - \frac{B}{r^5} v^3 & -\frac{\gamma^*}{r^2} \Delta \overset{0}{T} \\ m^{11} &= -B \left(v_{,11}^3 + \frac{\nu}{r^2} v^3 \right) & -\gamma^* \Delta \overset{1}{T} \\ m^{22} &= \underbrace{-\frac{B}{r^2} \left(\nu v_{,11}^3 + \frac{1}{r^2} v^3 \right)}_{\text{verformungsbedingt}} & \underbrace{-\frac{\gamma^*}{r^2} \Delta \overset{1}{T}}_{\text{temperaturbedingt}} . \end{aligned} \quad (7.21)$$

Da hier keine thermische Beanspruchung vorgegeben ist, ist die quasistatische Temperaturverteilung identisch mit der Temperatur im Ausgangszustand: $\check{T} = T_0$. Wegen $r \gg h$ kann man hier mit guter Näherung $\frac{r}{r - \theta^3} \approx 1$ setzen, dann lässt sich die *gekoppelte Wärmeleitgleichung* auf die folgende Form bringen:

$$\underbrace{\overset{+}{\rho} c \overset{\bullet}{T} + h_{,1}^1 + h_{,3}^3 + \gamma^* T_0 \left(\overset{\bullet}{v}_{,1}^1 - \theta^3 \overset{\bullet}{v}_{,11}^3 - \frac{1}{r} \overset{\bullet}{v}^3 \right)}_{\text{Kopplungsterm}} = 0 \quad \text{mit} \quad h^1 = -\lambda T_{,1}, \quad h^3 = -\lambda T_{,3} . \quad (7.22)$$

Das sich hier ergebende, gekoppelte Zeitdifferenzialgleichungssystem ist - vom äußeren Aufbau her - identisch mit (7.11). Da hier keine thermische Belastung existiert, verschwindet die *rechte Seite* von (7.11)₁. Formelmäßig sind der linearisierte Kopplungsterm und die skalarwertigen Koeffizienten im Anhang G ausgewertet, siehe (G.3) und (G.4).

Die Formulierung der Anfangsbedingungen kann hier analog zum Berechnungsbeispiel 1 vollzogen werden.

Anmerkungen zu den Temperatureigenformen:

Da die infolge Kopplung auftretenden Temperaturfelder $T(\theta^1, \theta^3, t)$ von der θ^2 -Koordinate unabhängig sind, können die zu verwendenden Temperatureigenformen folgendermaßen aufgespalten werden:

$$\overset{l}{T}(\theta^1 \theta^3) = \overset{m}{\tau}(\theta^3) \overset{n}{\vartheta}(\theta^1) . \quad (7.23)$$

Die 'eigentlich' zweidimensionale Eigenform $\overset{n}{\vartheta}$ hängt also hier wegen der Achsensymmetrie nur noch von θ^1 ab. Beide Eigenformen ($\overset{m}{\tau}$ und $\overset{n}{\vartheta}$) sind also eindimensional; für sie gelten die jeweiligen *inhomogenen thermischen Randbedingungen*³:

³Siehe Abbildung 7.6.

- Für $\tau^m(\theta^3)$ die inhomogenen Konvektionsrandbedingungen an den Laibungsflächen
- für $\vartheta^n(\theta^1)$ die inhomogenen Wärmestromrandbedingungen an den Rändern.

Auf die Bestimmung eindimensionaler Temperatureigenformen wird in Anhang C ausführlich eingegangen. Da ϑ^n hier lediglich von einer Koordinate abhängt, kann man die Eigenformen in $(C.4)_{1/2}$ analog weiterverwenden:

$$\vartheta^n(\theta^1) = \sin\left(\frac{n\pi}{h}\theta^1\right) \quad (n = 1, 3, \dots); \quad \vartheta^n(\theta^1) = \cos\left(\frac{n\pi}{h}\theta^1\right) \quad (n = 2, 4, \dots). \quad (7.24)$$

So einfache, analytische Formulierungen existieren für die Eigenformen $\tau^m(\theta^3)$, die an die Konvektionsrandbedingungen angepaßt werden, nicht. Sie berechnen sich aus (C.8) und (C.9), wobei die darin enthaltenen *Eigenwerte* k^m ($m = 1..10$) - die auf numerischem Wege ermittelt werden - in (C.10) angegeben sind. Dabei werden Wärmeübergangskoeffizienten, Schalendicke und Wärmeleitfähigkeit aus Berechnungsbeispiel 2 berücksichtigt.

Angaben zur Diskretisierung:

- Anzahl der Knoten in θ^1 -Richtung: 101.
- Anzahl der Temperatureigenformen in Längsrichtung: 40; in Dickenrichtung: 8
 $\Rightarrow l_{max} = 40 \cdot 8 = 320$.
- Anzahl der Eigenschwingformen: $n_{max} = 40$.
- Gesamtzahl der unbekannten Zeitfunktionen und der Gleichungen in (7.11):
 $l_{max} + n_{max} = 360$.

7.2.1 Diskussion der Ergebnisse und Entwicklung eines vereinfachten Berechnungsverfahrens zur Bestimmung kopplungsbedingter Temperaturänderungen in der Schale

Wie man in Abbildung 7.7 erkennt, treten auch hier wieder Schwingungen um eine quasistatische Ruhelage auf⁴. Die Amplituden variieren allerdings ständig, da sich die Schwingungen in Längsrichtung θ^1 ausbreiten, an den Rändern reflektiert werden und sich gegenseitig überlagern. So erkennt man in Abbildung 7.8, dass die *Schwingungen* für unterschiedliche Zeitpunkte der Betrachtung ganz unterschiedliche Formen annehmen. Unmittelbar nach Aufbringen der schockartigen Druckbelastung ($t = 0.1msec$) treten an den Rändern die für Schalenträgerwerke typischen *Biegestörungen* auf, die bei zunehmender Entfernung von der Einspannstelle abklingen, siehe auch Abbildung 7.9. Zu einem späteren Zeitpunkt ($t = 1msec$) kann jedoch von solch einem

⁴Da sich die Schockfunktion $g(t)$ schon nach kurzer Zeit an Null annähert, ist auch die statische Ruhelage nach einer sehr kurzen Zeitspanne mit der Ausgangslage des Zylinders nahezu identisch.

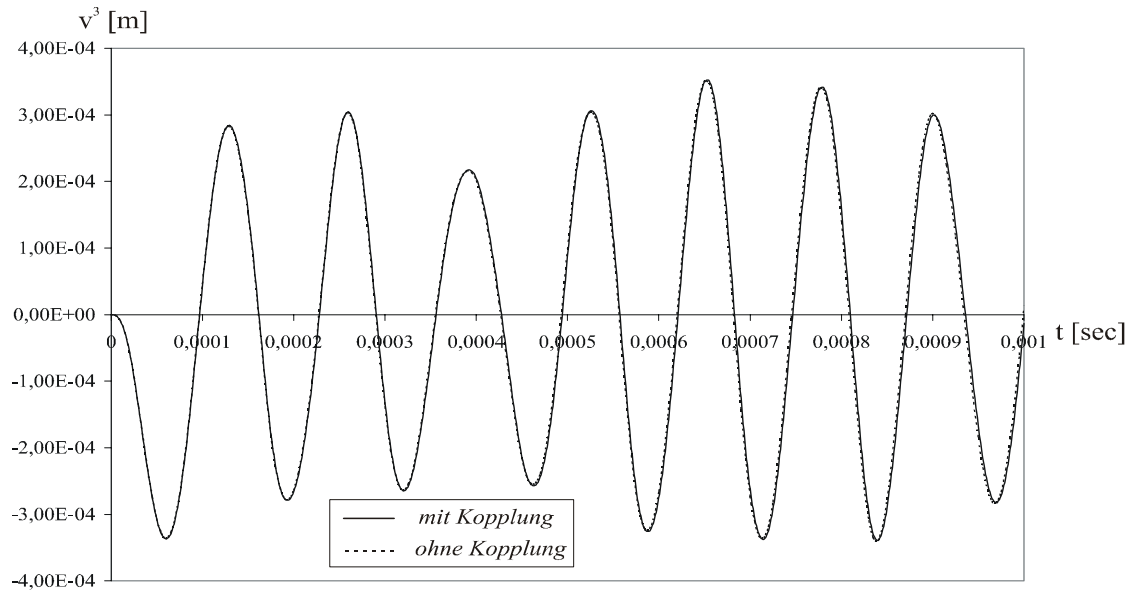


Abbildung 7.7: BB 2: Radialverschiebung $v^3(L/2, t)$

Abklingen nicht mehr die Rede sein: Große Schwingungsamplituden für v^3 - und in-
folgedessen auch große Beträge für m^{11} - können dann über die gesamte Mittelfläche
verteilt auftreten.

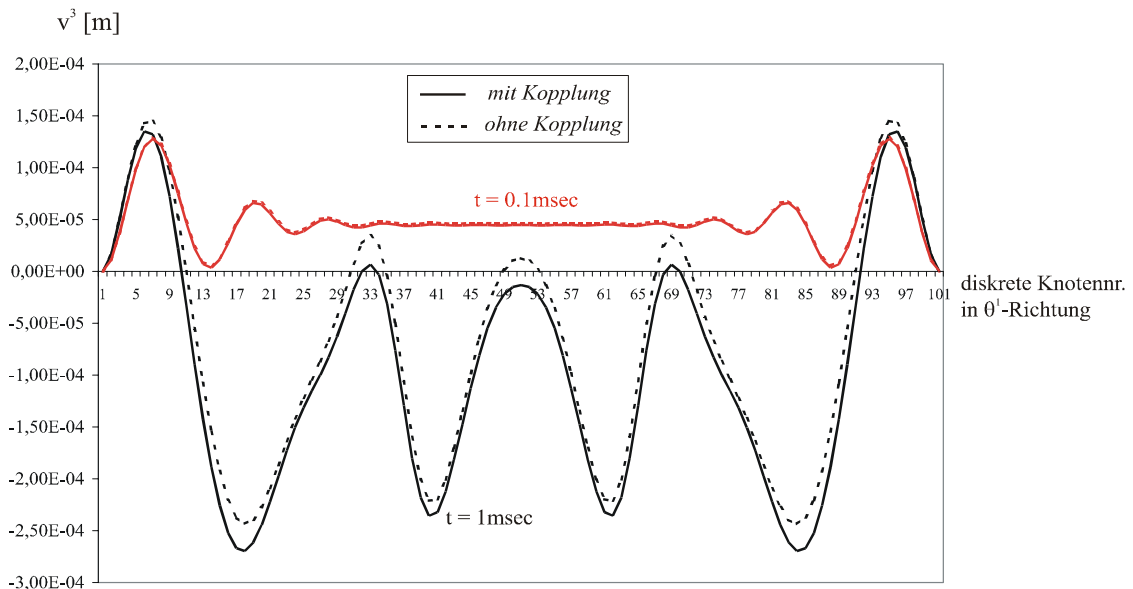


Abbildung 7.8: BB 2: Radialverschiebung $v^3(\theta^1, t)$ zur Zeit $t = 0.1msec$ und $t = 1msec$

Ein Vergleich mit den Ergebnissen in [20] zeigt, dass die Radialverschiebungen v^3
(z.B. zur Zeit $t = 0.1msec$) zwar qualitativ mit den hier berechneten übereinstimmen,
starke Abweichungen treten hingegen bei den Amplituden auf. Kontrollrechnungen mit
MSC/NASTRAN (Transient Structural Analysis) zeigen jedoch die Richtigkeit unserer
Ergebnisse: Im Rahmen einer entkoppelten Analyse decken sie sich mit den Ergebnissen

aus MSC/NASTRAN. Der Kopplungseffekt bewirkt hier - wie auch beim Berechnungs-

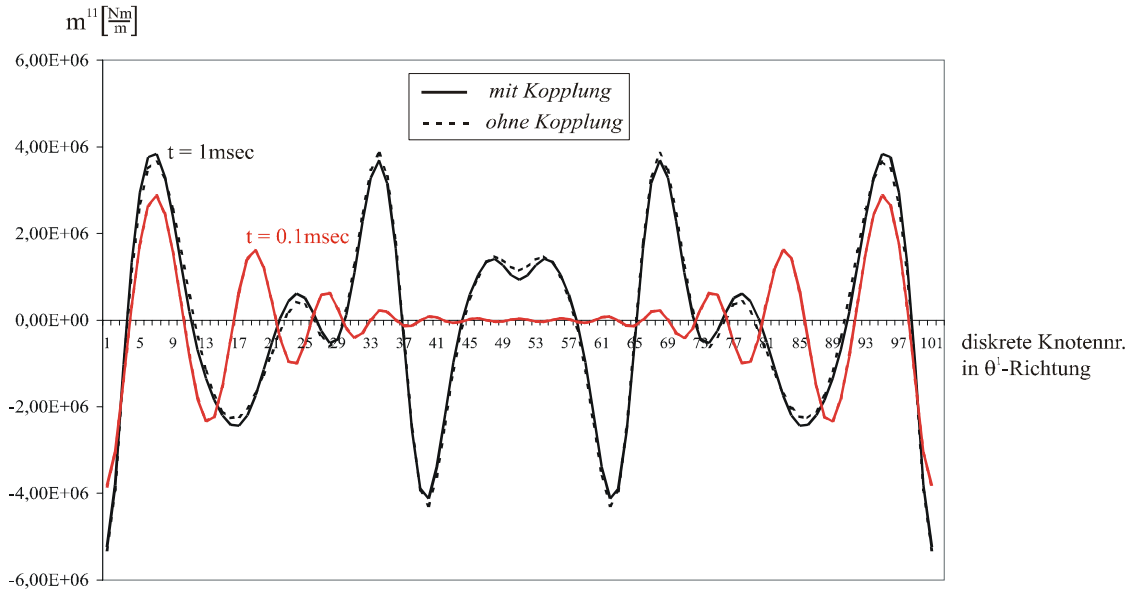


Abbildung 7.9: BB 2: Biegemoment $m^{11}(\theta^1, t)$ zur Zeit $t = 0.1msec$ und $t = 1msec$

beispiel 1 - eine schwache Phasenverschiebung der Schwingungen, wie man in Abbildung 7.7 gerade noch erkennen kann. Aufgrund dieser Phasenverschiebung kommt es zu Abweichungen zwischen den Verläufen der v^3 -Verschiebung (mit und ohne Kopplung) in Abbildung 7.8; gleiches gilt für die in Abbildung 7.9 dargestellten 'Kreppelmomente' m^{11} . Die Abweichungen nehmen - wie nicht anders zu erwarten ist - mit fortlaufender Zeit zu. Gemäß den Ausführungen in Abschnitt 7.1.1 ist die dämpfende Wirkung der Kopplung erst nach einigen Sekunden erkennbar, ein vollständiges Abklingen tritt bei der *Platte unter Temperaturschock* sogar erst nach etwa einer Minute auf. Die für den Zylinder analysierte Zeitspanne der Schwingung ($t = 0.1msec$) ist jedoch verglichen damit sehr viel geringer. Eine längerfristige Analyse wird hier nicht durchgeführt, da sie - mit den gegebenen Rechnerkapazitäten - praktisch nicht mehr zu bewältigen ist.

Die hier formulierten *Konvektionsrandbedingungen an den Laibungsflächen* (mit $\alpha_{(o)} = 1000 \frac{W}{m^2 K}$, $\alpha_{(u)} = 200 \frac{W}{m^2 K}$, $T^\infty = 293K$) entsprechen einer 'realitätsnahen' Beschreibung tatsächlicher thermischer Randbedingungen, wie sie sich z.B. bei einem sehr schnell strömenden Gas im Inneren und einem langsam strömenden Gas außerhalb des Zylinders ergeben könnten. Da hier die Temperaturen an den Laibungsflächen nicht wie im vorangegangenen Berechnungsbeispiel vorgeschrieben sind, können sich die Temperaturen innerhalb der Zylinderwand ($\theta^3 = -h/2..h/2$) 'frei' entwickeln; das gemäß (1.35) an der Oberfläche vorgegebene Verhältnis von Wärmestrom zu Temperaturdifferenz $\frac{q}{T - T^\infty} = \alpha$ muss dabei natürlich eingehalten sein.

Da die Umgebungstemperatur T^∞ identisch der Temperatur T_0 des Zylinders im Ausgangszustand ist, können Temperaturänderungen hier lediglich *kopplungsbedingt* auftreten. Die innerhalb der Zylinderwand (an der Stelle $\theta^1 = L/2$) auftretenden Temperaturänderungen sind in Abbildung 7.10 veranschaulicht. Sie erreichen ihre

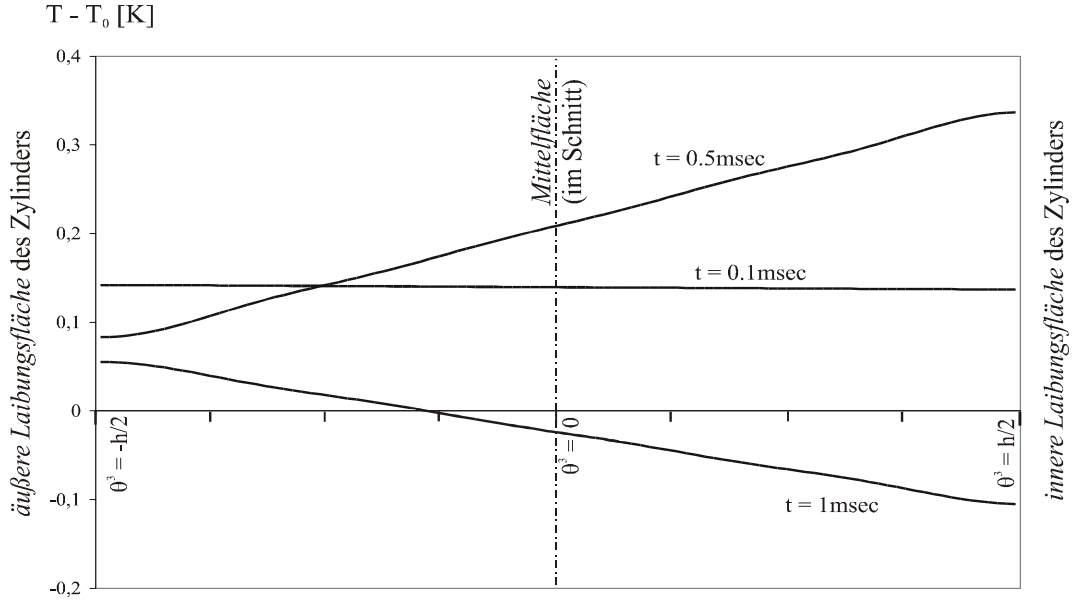


Abbildung 7.10: BB 2: Kopplungsbedingte Temperaturerhöhung in der Zylinderwand $T(L/2, \theta^3, t)$ zur Zeit $t = 0.1msec$, $t = 0.5msec$ und $t = 1msec$

Maximalwerte⁵, die hier unterhalb von $0.4K$ liegen, an den Laibungsflächen. Für unterschiedliche Zeitpunkte der Betrachtung erkennen wir eine näherungsweise lineare Verteilung von $T - T_0$ über θ^3 . Dies ist eigentlich nicht verwunderlich, da in den Kopplungsterm, den wir in Abschnitt 2.2.3 als eine 'zusätzliche Wärmequelle' interpretiert haben, Verzerrungsgeschwindigkeiten eingehen, die wegen der Normalenhypothese ebenfalls linear über θ^3 verteilt sein müssen. So ergibt sich beispielsweise in (7.22) für den Kopplungsterm eine in θ^3 lineare Formulierung.

Eine linear über θ^3 verteilte 'zusätzliche Wärmequelle' bedeutet aber noch nicht automatisch, dass die resultierenden Temperaturerhöhungen auch wieder linear verteilt sein müssen; dieser Schluss ist nur dann zulässig, wenn man das Phänomen *Wärmeleitung* vernachlässigt. Ob dies möglich ist, wird im Folgenden diskutiert: Die Vermutung liegt nahe, dass aufgrund der extrem hohen Schwinggeschwindigkeiten, und der damit zusammenhängenden Temperaturänderungen, der Energieaustausch durch Wärmeleitung an Bedeutung verliert. Betrachtet man die gekoppelte Wärmeleitgleichung

$$\rho c \dot{T} - \underbrace{\lambda(T_{,11} + T_{,33})}_{\approx 0} + \gamma^* T_0 \left(\dot{v}_{,1}^1 - \theta^3 \dot{v}_{,11}^3 - \frac{1}{r} \dot{v}^3 \right) = 0, \quad (7.25)$$

so wird darin *Energieaustausch durch Wärmeleitung* mit dem unterklammerten Ausdruck erfasst, in den 'Krümmungen' der Temperaturfelder eingehen. Wegen der extrem schnellen zeitlichen Änderungen und den nahezu verschwindenden Krümmungen $T_{,33}$ in Abbildung 7.10 mag es - im Rahmen einer Näherung - möglich sein, Terme mit Ortsableitungen in (7.25) zu streichen, da sie gegenüber den Zeitableitungen nicht ins

⁵Mit Untersuchungen, die sich über einen längeren Zeitraum erstrecken, kann gezeigt werden, dass kopplungsbedingte Temperaturänderungen hier Werte von bis zu $2K$ annehmen können.

Gewicht fallen. Diese Vorgehensweise führt auf eine *über die Zeit integrierbare Differentialgleichung*

$$+\rho c \dot{T} - \gamma^* T_0 \left(\dot{v}_{,1}^1 - \theta^3 \dot{v}_{,11}^3 - \frac{1}{r} \dot{v}^3 \right) = 0, \quad (7.26)$$

aus der bei vorgegebenen Verformungsfeldern die *kopplungsbedingt auftretenden Temperaturfelder* einfach abgeleitet werden können:

$$\int_0^t \dot{T} Dt = T - T_0 = -\frac{\gamma^* T_0}{+\rho c} \left(v_{,1}^1 - \theta^3 v_{,11}^3 - \frac{1}{r} v^3 \right). \quad (7.27)$$

Unter der Voraussetzung, dass die oben geschilderte Näherung begründet ist, müsste also ein *vereinfachtes Berechnungsverfahren* existieren, wonach man die kopplungsbedingten Temperaturfelder sehr einfach abschätzen kann:

- In einem ersten Schritt löst man unter Beachtung der mechanischen Randbedingungen die Bewegungsgleichungen der Schale und erhält so die Verformungsfelder $v^1(\theta^1, t)$ und $v^3(\theta^1, t)$.
- Dann setzt man diese in (7.27) ein und berechnet so - näherungsweise - die infolge Kopplung auftretenden Temperaturfelder.

Der Vergleich der Ergebnisse aus der (ursprünglichen) *gekoppelten Analyse* mit denen aus dem hier entwickelten *vereinfachten Berechnungsverfahren* findet sich in Abbildung 7.11. Bei der dargestellten Temperaturerhöhung an der Innenwand erkennt man eine sehr gute Übereinstimmung zwischen beiden Berechnungsvarianten. Die mit fortlaufender Zeit größer werdenden Abweichungen sind maßgeblich auf die oben beschriebene (kopplungsbedingte) Phasenverschiebung zurückzuführen.

Mit diesem - bislang in der Literatur noch nicht beschriebenen - Berechnungsverfahren lassen sich also die durch den elastischen Kopplungsterm in der Wärmeleitgleichung hervorgerufenen Temperaturfelder sehr einfach und mit guter Näherung abschätzen. Die Bedingungen für die Anwendbarkeit lauten:

- Die Temperaturen an den Laibungsflächen dürfen nicht vorgeschrieben sein, wie dies bei *Temperaturrandbedingungen* der Fall ist.
- Es müssen sehr hohe Schwinggeschwindigkeiten bei dem untersuchten Tragwerk auftreten, was bei Flächentragwerken wohl meist der Fall sein wird.

Bei Einsatz des vereinfachten Berechnungsverfahrens muss das *gekoppelte Problem* mit den dazugehörigen komplizierten Differenzialgleichungssystemen nicht mehr gelöst werden. Kennt man also die konkrete Belastung eines Flächentragwerks und berechnet man die daraus resultierenden Schwingungen (z.B. mit einem kommerziellen FE-Programm), so kann man nach Streichen der Wärmeströme in (3.68) die kopplungsbe-

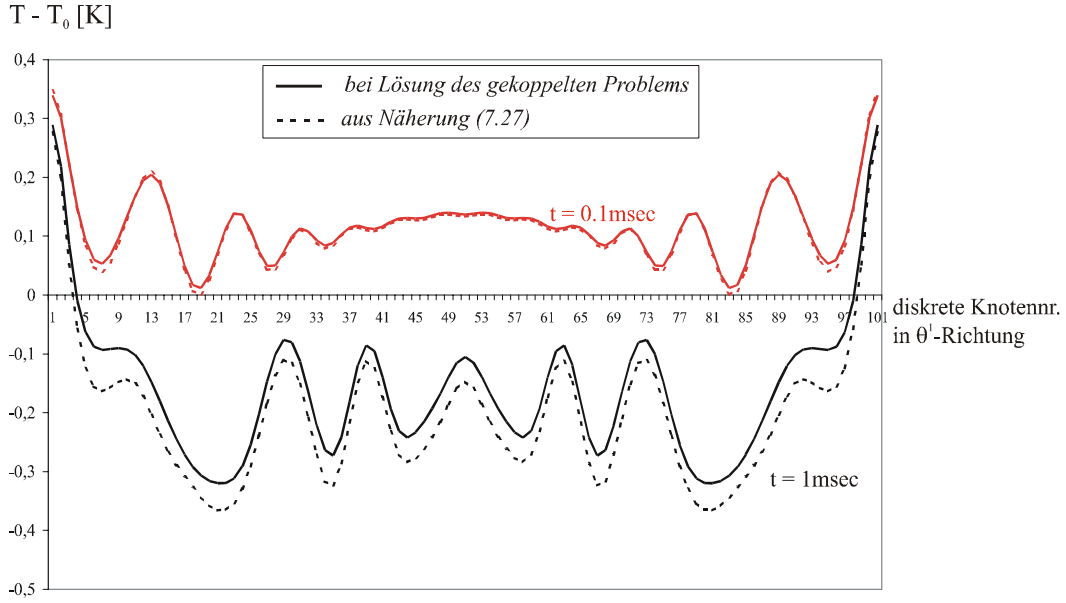


Abbildung 7.11: BB 2: Kopplungsbedingte Temperaturerhöhung an der inneren Zylinderwand $T(\theta^1, h/2, t)$ zur Zeit $t = 0.1 \text{ msec}$ und $t = 1 \text{ msec}$

dingt auftretenden Temperaturfelder abschätzen⁶:

$$T - T_0 = -\frac{\gamma^* T_0}{\rho c} \left(\gamma_\beta^\beta + \theta^3 \kappa_\rho^\lambda \nu_\lambda^\rho \right). \quad (7.28)$$

Die Dehnungen und Krümmungsänderungen der Schale $\gamma_\beta^\beta(\theta^\alpha, t)$ und $\kappa_\rho^\lambda(\theta^\alpha, t)$ werden also vorab bestimmt, sie hängen - unter Beachtung der jeweiligen konstitutiven Beziehungen - von den Verschiebungskomponenten $v^k(\theta^\alpha, t)$ ab.

Mit Blick auf das vereinfachte Berechnungsverfahren lässt sich feststellen: Die aus dem elastischen Kopplungsterm resultierenden zusätzlichen Temperaturänderungen in einem Flächentragwerk hängen

- zum einen von der Größe der auftretenden Verformungen und
- zum anderen von dem Multiplikator $\chi = \frac{\gamma^*}{\rho c} T_0 = \frac{E \alpha_T}{\rho c (1 - \nu)} T_0$ - also von einer Reihe von Materialkennwerten und der Temperatur im Ausgangszustand - ab.

Der Multiplikator χ gibt also an, wie groß - je nach Material und Anfangstemperatur - das Verhältnis zwischen kopplungsbedingten Temperaturänderungen und Verformungen in einem Flächentragwerk ist⁷.

⁶(7.28) folgt aus (3.68) unter der Voraussetzung, dass Temperaturänderungen klein gegenüber T_0 sind und keine Wärmequelle h vorhanden ist.

⁷Bei SI-Einheiten ergibt sich für den Werkstoff Stahl $\chi \approx 270$ und für Aluminium $\chi \approx 320$.

7.3 Ein kinetisches Stabilitätsproblem: Thermisch erregte Plattenschwingungen (BB3)

Abschließend wenden wir uns noch einem kinetischen Stabilitätsproblem zu, das auch in [50] - ebenfalls unter Berücksichtigung des elastischen Kopplungsterms - behandelt wird. Das in Abbildung 7.12 abgebildete ebene Flächentragwerk wird an seiner oberen und unteren Laibungsfläche einer periodisch-veränderlichen Erwärmung ausgesetzt, die durch vorgeschriebene zeitveränderliche Temperaturrandbedingungen beschrieben wird. Solche periodisch veränderlichen Erwärmungen sind z.B. auf Leiterplatten denkbar, in denen Wechselstrom fließt. Wie in [50] bemerkt, sind thermische Randbedingungen dieser Art aber auch in *Verbrennungskammern* oder auf *aerodynamisch erwärmten Flügelstrukturen* denkbar. Hinlänglich bekannt ist die periodische Erwärmung infolge Sonneneinstrahlung, die jedoch sehr langsam (Periode: 24h) vonstatten geht.

Die thermische Belastung führt hier dazu, dass sich im ungestörten Grundzustand ein sogenannter *Scheibenzustand* einstellt, das bedeutet, dass es zu keiner Durchbiegung kommt; Biegemomente und Querkräfte ergeben sich dann zu Null:

$$\overset{\circ}{v}^3 = \overset{\circ}{m}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{n}^{\alpha 3} = 0. \quad (7.29)$$

Im *Scheibenzustand*, bei dem das Tragwerk *in der Ebene* belastet wird, treten allgemein Verschiebungskomponenten $\overset{\circ}{v}^\alpha$ und *Membrankräfte* $\overset{\circ}{n}^{\alpha\beta}$ auf. Bei Überschreiten einer *kritischen Belastungskombination* - diese wird charakterisiert durch ganz bestimmte Werte für T_{stat} , T_{dyn} und Ω - bewirken schon sehr kleine *Störungen*, dass sich das Flächentragwerk aus der Ebene heraus bewegt und die Störungen immer weiter anwachsen, was wir im Sinne Ljapunows als *kinetische Instabilität* bezeichnen. Das Ziel der nachfolgenden Stabilitätsuntersuchung wird es sein, *Instabilitätsdiagramme* für *Belastungskombinationen* zu entwickeln, in denen *Grenzen der Stabilität* eingezeichnet sind, und bei deren Überschreitung mit *kinetischer Instabilität* zu rechnen ist.

In einem ersten Schritt wird versucht, die sich im Grundzustand einstellenden, zeitveränderlichen Normalkräfte und Temperaturen auf analytischem Wege zu ermitteln. Verformungen und Schubkräfte treten hier - wie sich auch mit MSC/NASTRAN verifizieren lässt - im Grundzustand nicht auf:

$$\overset{\circ}{v}^\alpha = 0; \quad \overset{\circ}{n}^{12} = 0. \quad (7.30)$$

Die Temperaturfelder variieren aufgrund der Art der thermischen Randbedingungen nur in Dickenrichtung, $\overset{\circ}{T} = \overset{\circ}{T}(\theta^3, t)$, und sind symmetrisch bezüglich der Mittelfläche. In die verbliebenen Schnittreaktionen $\overset{\circ}{n}^{11}$ und $\overset{\circ}{n}^{22}$ gehen wegen (7.30)₁ nur noch temperaturbedingte Anteile ein. Die Auswertung der konstitutiven Beziehungen in (3.46) mit (3.41)₁ liefert:

$$\overset{\circ}{n}^{11} = \overset{\circ}{n}^{22} = -\gamma^* \int_{-h/2}^{h/2} \left(\overset{\circ}{T} - T_0 \right) d\theta^3. \quad (7.31)$$

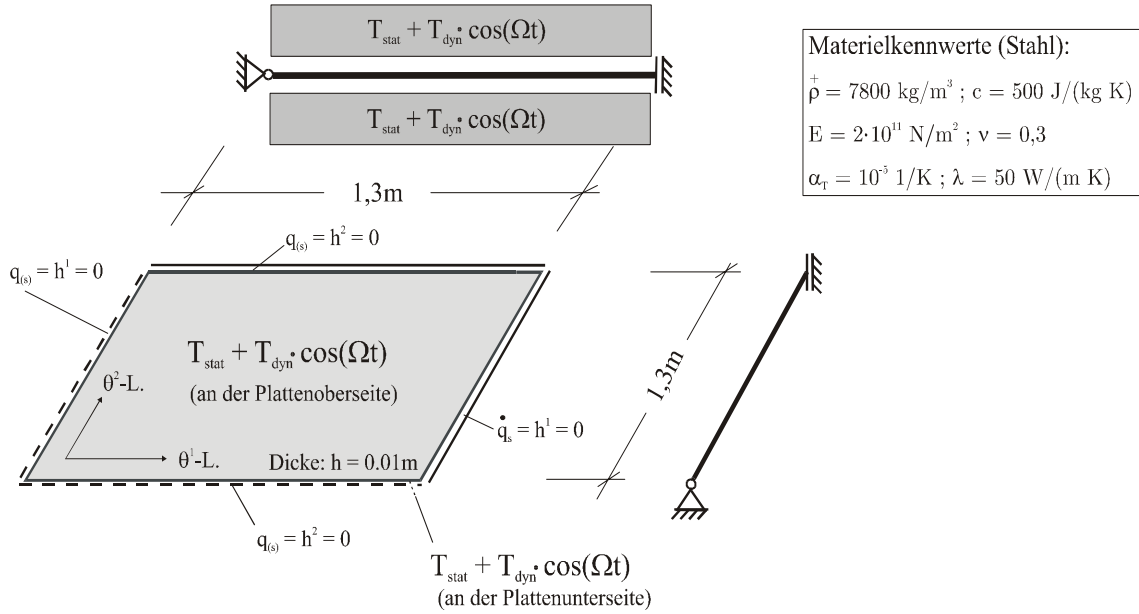


Abbildung 7.12: BB 3: System

Die darin enthaltene Temperatur $\overset{\circ}{T} = \overset{\circ}{T}(\theta^3, t)$ muss aus der *Wärmeleitgleichung des Grundzustandes* - unter Anpassung an die Temperaturrandbedingungen - berechnet werden. Aufgrund der verschwindenden Verformungen lässt sich (5.21) hier auf die folgende Form bringen:

$$\overset{+}{\rho} c \overset{\circ}{\dot{T}} - \lambda \overset{\circ}{T}_{,33} = 0. \quad (7.32)$$

Für eine analytische Lösung wird (7.32) nun aufgespalten:

$$\overset{\circ}{T}_{,33} = 0 \text{ (quasistatisch)}; \quad -\lambda \overset{\circ}{\tilde{T}}_{,33} + \overset{+}{\rho} c \overset{\circ}{\dot{\tilde{T}}} = -\overset{+}{\rho} c \overset{\circ}{\dot{T}} \text{ (dynamisch)}. \quad (7.33)$$

Darin bezeichnet $\overset{\circ}{T}$ den quasistatischen und $\overset{\circ}{\tilde{T}}$ den dynamischen Anteil der Temperatur im Grundzustand:

$$\overset{\circ}{T} = \overset{\circ}{T} + \overset{\circ}{\tilde{T}}. \quad (7.34)$$

Der quasistatische Anteil, der die inhomogenen thermischen Randbedingungen an der Ober- und Unterseite der Platte erfüllt, kann unmittelbar angegeben werden:

$$\overset{\circ}{T}(t) = T_0 + T_{stat} + T_{dyn} \cos(\Omega t) \Rightarrow \overset{\circ}{\dot{T}}(t) = -T_{dyn} \Omega \sin(\Omega t). \quad (7.35)$$

Für den verbliebenen, dynamischen Anteil $\overset{\circ}{\tilde{T}}(\theta^3, t)$ machen wir nun *Seperationsansätze* mit bekannten (symmetrischen) Eigenformen⁸, die die verbliebenen homogenen Randbedingungen an der Ober- und Unterseite der Platte erfüllen

$$\overset{\circ}{\tilde{T}}(\theta^3, t) = \sum_{n=1,3,\dots} \left[\overset{n}{T}(\theta^3) \overset{n}{x}(t) \right] \quad \text{mit} \quad \overset{n}{T}(\theta^3) = \cos\left(n \pi \frac{\theta^3}{h}\right). \quad (7.36)$$

⁸Siehe Anhang C, (C.4)₁.

Multipliziert man die Differenzialgleichung (7.33)₂ mit $\overset{n}{T}(\theta^3)$ und integriert anschließend über die Plattendicke h , so kann man unter Beachtung von (7.35) und (7.36) die dynamische Wärmeleitgleichung des Grundzustandes nach einigen Umformungen auf die folgende Form bringen:

$$\overset{\bullet}{\overset{n}{x}}(t) + \frac{\lambda}{\overset{+}{\rho}c} \frac{n^2 \pi^2}{h^2} \overset{n}{x}(t) = \Omega T_{dyn} \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(\Omega t) \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (7.37)$$

Für die hierin enthaltenen unbekannten Zeitfunktionen $\overset{n}{x}(t)$, machen wir mit Blick auf die harmonische Erregung den üblichen Lösungsansatz:

$$\overset{n}{x}(t) = \overset{n}{x}_{(1)} \sin(\Omega t) + \overset{n}{x}_{(2)} \cos(\Omega t). \quad (7.38)$$

Dann lassen sich die verbliebenen Unbekannten $\overset{n}{x}_{(1)}$ und $\overset{n}{x}_{(2)}$ nach Koeffizientenvergleich aus (7.37) ableiten:

$$\begin{aligned} \overset{n}{x}_{(1)} &= \frac{\overset{n}{\xi} \Omega}{\overset{n}{\xi}^2 + \Omega^2} T_{dyn} \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right); \quad \overset{n}{x}_{(2)} = -\frac{\Omega^2}{\overset{n}{\xi}^2 + \Omega^2} T_{dyn} \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \text{mit } \overset{n}{\xi} &= \frac{\lambda}{\overset{+}{\rho}c} \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Die sich einstellende orts- und zeitabhängige *Temperaturverteilung des Grundzustandes* lässt sich schließlich analytisch angeben:

$$\overset{o}{T}(\theta^3, t) = T_0 + T_{stat} + T_{dyn} \cos(\Omega t) + \sum_{n=1,3}^{n_{max}} \left[\cos\left(n\pi \frac{\theta^3}{h}\right) \left(\overset{n}{x}_{(1)} \sin(\Omega t) + \overset{n}{x}_{(2)} \cos(\Omega t)\right) \right]. \quad (7.40)$$

Durch Einsetzen in die konstitutive Gleichung (7.31) ergeben sich dann für die *Normalkräfte des Grundzustandes* ebenfalls analytische Zeitfunktionen:

$$\overset{o}{n}^{11} = \overset{o}{n}^{22} = -\gamma^* h [T_{stat} + T_{dyn} V_{dyn} \cos(\Omega t + \varphi)]. \quad (7.41)$$

Die der periodisch-veränderlichen Temperaturamplitude T_{dyn} zugeordnete dimensionlose Funktion V_{dyn} berechnet sich dann zu

$$V_{dyn} = \sqrt{\left[\sum_{n=1,3}^{n_{max}} \left(\overset{n}{\zeta} \overset{n}{\xi}\right) \right]^2 + \left[1 - \sum_{n=1,3}^{n_{max}} \left(\overset{n}{\zeta} \Omega\right) \right]^2} \quad \text{mit} \quad \overset{n}{\zeta} = \frac{8\Omega}{n^2 \pi^2 (\Omega^2 + \overset{n}{\xi}^2)}. \quad (7.42)$$

Für die Genauigkeit, mit der diese Funktion berechnet werden kann, ist die Zahl n_{max} der mitgenommenen Eigenformen entscheidend.

Wie wir in Abbildung 7.13 erkennen, konvergiert die Funktion schon für geringe Werte für n_{max} . Sie hängt neben den Materialkennwerten $(\lambda, \overset{+}{\rho}, c)$ und der Plattendicke h maßgeblich von der Kreisfrequenz Ω ab, mit der die Temperatur an den Laibungsflächen 'schwingt'. Für sehr kleine Frequenzen geht diese Funktion erwartungsgemäß gegen den Wert 1 - ein quasistatischer Zustand stellt sich ein.

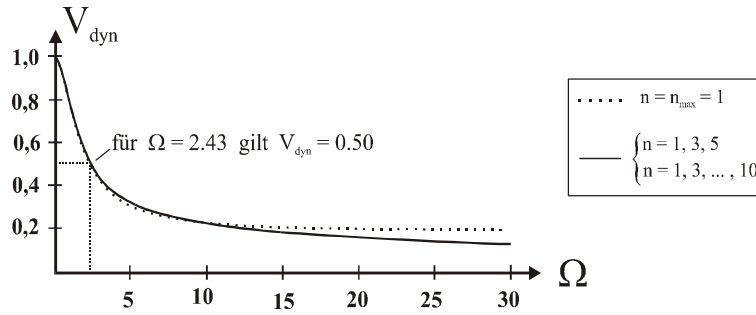


Abbildung 7.13: BB 3: Funktion V_{dyn} für eine Stahlplatte ($h = 0.01$)

Da mit dem Lösungsansatz in (7.38) nur die *spezielle Lösung* der Differenzialgleichung (7.37) abgebildet werden kann, repräsentieren die analytischen Lösungen für die Temperatur (7.40) und die Normalkräfte (7.41) einen 'eingeschwungenen Zustand', der sich nach hinreichend langer Zeit einstellt. Mit der nachfolgenden kinetischen Stabilitätsanalyse soll geklärt werden, ob der *eingeschwungene Grundzustand*⁹ - unter vorgegebener thermischer Belastung - stabil bzw. instabil ist. Die thermische Belastung wird hier durch konkrete Werte für T_{stat} , T_{dyn} und Ω eindeutig festgelegt.

Bei der kinetischen Stabilitätsanalyse sollen Störgrößen lediglich *linear* in den Stabilitätsgleichungen berücksichtigt werden. Die beim Übergang in den gestörten Nachbarzustand auftretenden Verformungen und Temperaturzuwächse können dann nicht mehr konkret berechnet werden, was aber im Rahmen einer Stabilitätstheorie auch nicht unbedingt notwendig ist, da wir uns hier lediglich dafür interessieren, ob eine konkrete thermische Belastung zu kinetischer Instabilität führt oder nicht. Auf die Formulierung einer *nichtlinearen Indifferenztheorie* - bei der die mit (G) gekennzeichneten Größen mitgenommen würden - wird hier verzichtet, da sich die Verformungen im Grundzustand zu Null ergeben und die Temperaturen $\overset{\circ}{T}$ und T_0 - wie wir noch sehen werden - nur geringfügig voneinander abweichen. Somit kann beispielsweise für den Kopplungsterm (5.30) übernommen werden.

Vorab berechnen wir nun im Rahmen einer *statischen Stabilitätsanalyse* mit MSC/NASTRAN die *kritische Temperaturbeanspruchung* $T_{stat} = T_{krit}$, bei der erstmals Instabilität bei der Platte auftritt, ohne dass hierbei dynamische Anteile in der Temperatur mitgenommen werden¹⁰. Die Temperatur T_{krit} wird uns im Folgenden als *Referenzgröße* bei der Einführung dimensionsloser Lastparameter (7.49) dienen.

Betrachtet man die mit MSC/NASTRAN berechnete *Beulform*, siehe Abbildung 7.14, so kann man die folgende Schlussfolgerung treffen: Bei Überschreiten der kritischen Temperatur geht der Flächenträger vom Grundzustand, in dem lediglich Scheiben-

⁹In diesem Zusammenhang kann der Zeitpunkt t_0 (Anfangszustand), in dem die Störung aufgebracht wird, als der Zeitpunkt verstanden werden, in dem sich ein *eingeschwungener Grundzustand* bereits realisiert hat. Siehe hierzu Abbildung 5.1.

¹⁰Die kritische (statische) Temperaturbeanspruchung T_{krit} kann auch durch Auswertung der in Abschnitt 5.1 formulierten *Stabilitätsgleichungen des ungekoppelten Problems* ermittelt werden. Vergleichsberechnungen haben eine nahezu perfekte Übereinstimmung mit den MSC/NASTRAN-Ergebnissen gezeigt.

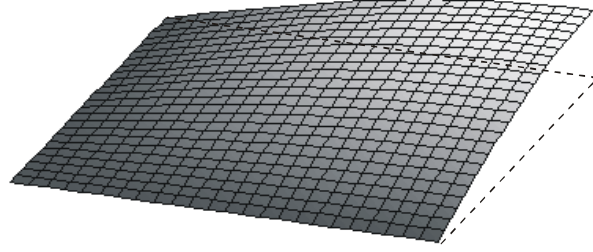


Abbildung 7.14: BB 3: Beulform

schnittgrößen geweckt werden, in einen Nachbarzustand über, der durch das zusätzliche Auftreten von Plattenschnittgrößen und -deformationen gekennzeichnet ist. Da man bei Mitnahme dynamischer Effekte mit ähnlichen Instabilitätserscheinungen rechnen kann, ist im Rahmen der hier durchzuführenden gekoppelten Stabilitätsuntersuchung mit den folgenden *störungsbedingten Zuwächsen* zu rechnen:

$$v^3, \kappa_{\rho\lambda}, m^{\alpha\beta} \text{ und } T \text{ (wegen der Kopplung!)}. \quad (7.43)$$

In Abschnitt 5.2 werden die thermomechanisch gekoppelten Stabilitätsgleichungen für beliebig gekrümmte Schalentragwerke formuliert und für eine numerische Lösung aufbereitet. Letztendlich gelingt es, mit den Ansätzen

$$v^r = \sum_k \left[\overset{k}{v}^r \overset{k}{h}(t) \right] \quad \text{und} \quad T = \sum_l \left[\overset{l}{T} \overset{l}{f}(t) \right] \quad (7.44)$$

für die Störgrößen ein *gekoppeltes Zeitdifferenzialgleichungssystem* zu entwickeln, siehe (5.35), dass nur noch von den Zeitfunktionen $\overset{k}{h}(t)$ und $\overset{l}{f}(t)$ abhängt.

Im Rahmen einer *linearisierten Stabilitätsanalyse* berechnen sich die darin enthaltenen Größen $\overset{l}{A}$, $\overset{l}{B}$ und $\overset{l}{C}$ für die Platte zu

$$\begin{aligned} \overset{l}{A} &= \overset{+}{\rho} c \int_{(\overset{+}{V})} \overset{l}{T} \overset{l}{T} d\overset{+}{V}, \quad \overset{l}{B} = \lambda \int_{(\overset{+}{V})} \overset{l}{T}_{,k} \overset{l}{T}_{,k} d\overset{+}{V} \quad (\sum k!), \\ \overset{l}{C}(t) &= \int_{(\overset{+}{V})} \overset{l}{T} \overset{l}{C} d\overset{+}{V} = \sum_{n=1}^{n_{max}} \underbrace{\left[-\gamma^* T_0 \int_{(\overset{+}{V})} \overset{l}{T} \left(\overset{k}{v}_{,11}^3 + \overset{k}{v}_{,22}^3 \right) \theta^3 d\overset{+}{V} \cdot \overset{\bullet}{\overset{k}{h}}(t) \right]}_{= \overset{lk}{D}} \end{aligned} \quad (7.45)$$

Zur Bestimmung der zeitabhängigen Größen $\overset{k}{W}_G$, $\overset{k}{E}_G$ und $\overset{k}{W}_R$ in (5.35) betrachten wir die Arbeitsformulierung (5.4): Für die hier untersuchte Platte verbleiben lediglich die nachfolgend aufgeführten Anteile in den *virtuellen Arbeitsbeiträgen* ($\overset{o}{n}^{12} = \overset{o}{n}^{21} = 0$):

$$W_G^{virt} = \int_{(\overset{+}{A})} m^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta} d\overset{+}{A} + \int_{(\overset{+}{A})} \overset{o}{n}^{\alpha\beta} \underbrace{\delta \Delta \gamma_{\alpha\beta}}_{= v_{,\alpha}^3 \delta v_{,\beta}^3} d\overset{+}{A}; \quad E^{virt} = \overset{+}{\rho} h \int_{(\overset{+}{A})} \overset{\bullet}{v}^3 \delta v^3 d\overset{+}{A}; \quad W_R^{virt} = 0. \quad (7.46)$$

Die harmonisch zeitveränderlichen Normalkräfte $\overset{o}{n}^{11}$ und $\overset{o}{n}^{22}$ des Grundzustandes sind vorab bekannt und berechnen sich gemäß (7.41). Da wir hier auch störungsbedingte Zuwächse in der Temperatur erwarten, ergibt sich aus den konstitutiven Gleichungen für die Momentenzuwächse¹¹ die folgenden Beziehungen:

$$m^{\alpha\beta} = BG^{\alpha\beta\rho\lambda}\kappa_{\rho\lambda} - \gamma^*\Delta\overset{1}{T}\delta^{\alpha\beta} \quad \text{mit} \quad \Delta\overset{1}{T} = \int_{-h/2}^{h/2} T\theta^3 d\theta^3, \quad \kappa_{\rho\lambda} = \underset{(L)}{\kappa_{\rho\lambda}} = -v_{,\rho\lambda}^3. \quad (7.47)$$

Die aus einer Arbeitsformulierung resultierenden Größen $\overset{k}{W}_G$ und $\overset{k}{E}$ in (5.35) können dann berechnet werden; wir beziehen sie hier auf die Referenzgröße T_{krit} . Nach einigen Umformungen erhält man mit den Separationsansätzen (7.44) und unter Beachtung der Orthogonalitätsbedingungen (4.57) letztendlich:

$$\begin{aligned} \frac{\overset{k}{W}_G}{T_{krit}} &= \underbrace{\frac{B}{T_{krit}} \int_{(\overset{+}{A})} G^{\alpha\beta\rho\lambda} v_{,\alpha\beta}^3 v_{,\rho\lambda}^3 d\overset{+}{A} \cdot \overset{k}{h}(t)}_{= \overset{k}{E} = \left(\overset{k}{\omega}\right)^2 / T_{krit}} + \underbrace{\sum_l^{l_{max}} \left[\frac{\gamma^*}{T_{krit}} \int_{(\overset{+}{V})}^l T \left(v_{,11}^3 + v_{,22}^3 \right) \theta^3 d\overset{+}{V} \cdot \overset{l}{f}(t) \right]}_{= \overset{kl}{F}} \\ &\quad + [\kappa_{stat} + \kappa_{dyn} \cos(\Omega t + \varphi)] \underbrace{\sum_n^{n_{max}} \left[-\gamma^* h \int_{(\overset{+}{A})} \left(v_{,1}^3 v_{,1}^3 + v_{,2}^3 v_{,2}^3 \right) d\overset{+}{A} \cdot \overset{n}{h}(t) \right]}_{= \overset{kn}{G}} \\ \frac{\overset{k}{E}_G}{T_{krit}} &= \underbrace{\frac{\overset{+}{m}}{T_{krit}} \int_{(\overset{+}{A})} v^3 v^3 d\overset{+}{A} \cdot \overset{\bullet\bullet}{h}(t)}_{= \overset{k}{H} = 1/T_{krit}}. \end{aligned} \quad (7.48)$$

In (7.48) sind die folgenden *dimensionslosen Lastparameter* enthalten:

$$\kappa_{stat} = \frac{T_{stat}}{T_{krit}} \quad \text{und} \quad \kappa_{dyn} = \frac{T_{dyn} V_{dyn}}{T_{krit}}. \quad (7.49)$$

Das aus den kinetischen Stabilitätsgleichungen entwickelte Zeitdifferenzialgleichungssystem (5.35) kann nun in eine übersichtliche *Matrizenformulierung* überführt werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{A} \\ \mathbf{E} + p(\tau)\mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{H} & \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \dot{\mathbf{h}} \\ \ddot{\mathbf{h}} \\ \mathbf{f} \\ \dot{\mathbf{f}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (7.50)$$

¹¹Siehe hierzu auch (5.5), (5.33) mit (5.34) sowie (B.31).

Die hierin enthaltenen Matrizen **A**, **B**, **E** und **H** sind mit Ausnahme der Diagonalelemente - in die jeweils die Größen $\overset{l}{A}$, ..., $\overset{k}{H}$ eingehen - mit Nullen besetzt. Die Matrizen **D**, **F** und **G** sind voll-besetzt, sie enthalten die in (7.45) bzw. (7.48) aufgeführten Koeffizienten mit je zwei aufgesetzten Indizes. So gilt beispielhaft:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \overset{1}{A} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \overset{2}{A} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \overset{l_{max}}{A} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \overset{11}{D} & \overset{12}{D} & \dots & \overset{1 k_{max}}{D} \\ \overset{21}{D} & \overset{22}{D} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overset{l_{max} 1}{D} & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

Das homogene Differenzialgleichungssystem (7.50) enthält wegen der *zeitveränderlichen skalaren Lastgröße*

$$p(\tau) = \kappa_{stat} + \kappa_{dyn} \cos(\Omega\tau) \quad \text{mit} \quad \tau = t + \varphi/\Omega \quad (7.52)$$

harmonisch veränderliche Koeffizienten. Man spricht dann von einem *System Mathieuscher Differenzialgleichungen*. Solche Gleichungen sind charakteristisch für *parameterregte Schwingungen*, die beispielsweise auch bei *Stäben unter pulsierender Druckbeanspruchung* auftreten können¹².

Da die genannten Matrizen mit ihren jeweiligen Koeffizienten vorab berechnet werden können, verbleiben als Unbekannte in (7.50) die vektoriell zusammengefassten Zeitfunktionen

$$\mathbf{h}(\tau) = \left[\overset{1}{h}(\tau), \overset{2}{h}(\tau), \dots, \overset{k_{max}}{h}(\tau) \right]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{f}(\tau) = \left[\overset{1}{f}(\tau), \overset{2}{f}(\tau), \dots, \overset{l_{max}}{f}(\tau) \right]^T, \quad (7.53)$$

für die wir - ebenso wie in [50] - jeweils *periodische*, sowie *antiperiodische Fourierreihenansätze* machen:

periodisch:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\tau) &= \sum_{m=0,2,4,\dots} \left[\mathbf{a}_m \cdot \sin\left(\frac{m\Omega\tau}{2}\right) + \mathbf{b}_m \cdot \cos\left(\frac{m\Omega\tau}{2}\right) \right] \\ \mathbf{f}(\tau) &= \sum_{m=0,2,4,\dots} \left[\mathbf{c}_m \cdot \sin\left(\frac{m\Omega\tau}{2}\right) + \mathbf{d}_m \cdot \cos\left(\frac{m\Omega\tau}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (7.54)$$

antiperiodisch:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\tau) &= \sum_{m=1,3,\dots} \left[\mathbf{a}_m \cdot \sin\left(\frac{m\Omega\tau}{2}\right) + \mathbf{b}_m \cdot \cos\left(\frac{m\Omega\tau}{2}\right) \right] \\ \mathbf{f}(\tau) &= \sum_{m=1,3,\dots} \left[\mathbf{c}_m \cdot \sin\left(\frac{m\Omega\tau}{2}\right) + \mathbf{d}_m \cdot \cos\left(\frac{m\Omega\tau}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

¹²Siehe auch [41].

Die Ansätze in $(7.54)_{1/2}$ bezeichnen die üblichen - in der Mathematik [10] gebräuchlichen - *periodischen Lösungsansätze* (Periode: $T = \frac{2\pi}{\Omega}$). Die *antiperiodischen Lösungsansätze* $(7.54)_{3/4}$ können auch als *periodische Lösungen mit doppelter Schwingungsdauer $2T$* gedeutet werden.

Nach Einsetzen der Lösungsansätze in (7.50) und Koeffizientenvergleich ergibt sich ein homogenes Gleichungssystem mit

- der Koeffizientenmatrix \mathbf{X}_T bei periodischen und
- der Koeffizientenmatrix \mathbf{X}_{2T} bei antiperiodischen Ansätzen.

Aus Platzgründen sind die beiden Matrizen¹³, die Bandstruktur aufweisen, im Anhang F dargestellt. Durch Ausnutzen der erkennbaren Regelmäßigkeiten im Aufbau der Matrizen sind numerische Berechnungen mit unterschiedlich hoher Genauigkeit (im Hinblick auf die Mitnahme höherwertiger Summenglieder in den Fourierreihen) leicht durchführbar. Für einen Vergleich unserer Ergebnisse mit denen aus [50] in Abbildung 7.17 werden je 30 Reihenglieder mitgenommen, um konvergierende Ergebnisse zu erzielen. Für die Berechnungen zu Abbildung 7.15 und 16, wo wir uns maßgeblich für die *Hauptinstabilitätsbereiche* interessieren, werden lediglich 8 Reihenglieder berücksichtigt.

Unser maßgebliches Interesse richtet sich hier auf die Berechnung der Grenzen zwischen stabilen und instabilen Bereichen in den Stabilitätsdiagrammen. Die zu diesen *Stabilitätsgrenzen* gehörenden Belastungskombinationen (mit konkreten Werten für κ_{dyn} , κ_{stat} und Ω) berechnen sich aus der Bedingungen

$$\det(\mathbf{X}_T) = 0 \quad \text{oder} \quad \det(\mathbf{X}_{2T}) = 0. \quad (7.55)$$

Wenn (7.55) erfüllt ist, ergeben sich *nichttriviale Lösungen* für die Koeffizienten in $\mathbf{a}_m \dots \mathbf{d}_m$ aus (7.54); das bedeutet, dass die *Stabilitätsbedingung* (5.18) gerade noch erfüllt werden kann. Höhere thermische Lasten führen - wie sich zeigen lässt - zu immer weiter anwachsenden Störungen und somit zu *kinetischer Instabilität*.

Angaben zur Diskretisierung:

- Anzahl der Knoten in der Mittelfläche: $11 \cdot 11 = 121$.
- Zahl der mitgenommenen Reihenglieder bei der Berechnung von V_{dyn} : 10.
- Anzahl der Temperatureigenformen in der Mittelfläche: 1. In Dickenrichtung: 5.
- Anzahl der Eigenschwingformen: 1.

MSC/NASTRAN-Vorberechnungen:

$$\omega = 44.703 \frac{1}{sec} ; \quad T_{krit} = 1.8712K. \quad (7.56)$$

¹³Sie werden in der Literatur, siehe [12], auch als *Hypermatrizen* bezeichnet.

7.3.1 Diskussion der Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse aus einer gekoppelten Stabilitätsanalyse denen aus einer entkoppelten Stabilitätsanalyse gegenübergestellt, um die Auswirkungen des elastischen Kopplungseffekts identifizieren zu können.

Im Rahmen einer *entkoppelten Analyse* wird der Kopplungsterm in der Wärmeleitgleichung zu Null gesetzt. Da dann - wie in Abschnitt 5.1 - nur noch Störungen in den Verschiebungskomponenten v^k berücksichtigt werden müssen, reduziert sich das homogene Zeitdifferenzialgleichungssystem (7.50) zu

$$[\mathbf{E} + p(\tau)\mathbf{G} \quad \mathbf{H}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \ddot{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (7.57)$$

Die Berechnung der *Stabilitätsgrenzen* gelingt dann analog zu der oben geschilderten Vorgehensweise. Fourierreihenansätze für $\mathbf{f}(\tau)$ werden nicht mehr benötigt.

In Abbildung 7.15 und 16 sind die Instabilitätsbereiche für zwei unterschiedliche statische Lastparameter κ_{stat} dargestellt. Punkten innerhalb der Diagramme kann man dann - je nach Lage - unterschiedliche Werte für κ_{dyn} , siehe (7.49), und die *bezogenen Erregerfrequenz* $\frac{\Omega}{2\omega}$ zuweisen. Punkte, die auf den grau hinterlegten *Instabilitätsbereichen* liegen bezeichnen dann konkrete thermische Belastungskombinationen $(\kappa_{stat}, \kappa_{dyn}, \Omega)$, die zu *kinetischer Instabilität* bei der Platte in Abbildung 7.12 führen würden.

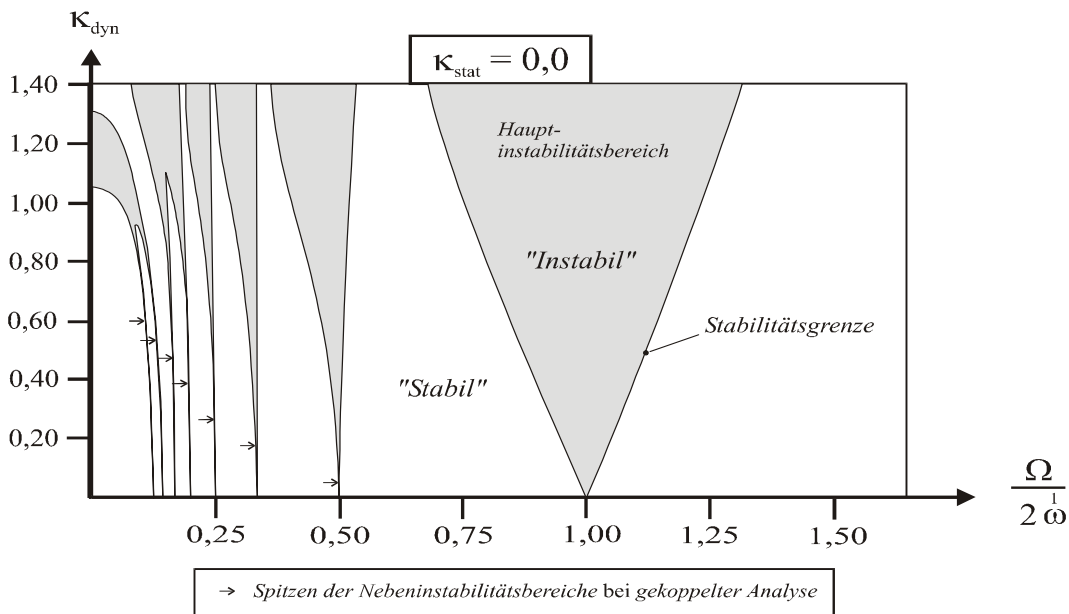


Abbildung 7.15: BB 3: Instabilitätsbereiche für $\kappa_{stat} = 0$

Mit bloßem Auge sind Unterschiede zwischen einer gekoppelten und einer entkoppelten Stabilitätsanalyse in Abbildung 7.15 kaum erkennbar. Einzig die Tatsache, dass bei einer gekoppelten Analyse die Spitzen der *Nebeninstabilitätsbereiche* 'weg-gedämpft'

werden, lässt auf einen sehr schwachen Dämpfungseffekt schließen, den wir weiter oben schon festgestellt haben. Ansonsten erkennen wir für $\kappa_{stat} = 0$ in Abbildung 7.15 das typische Phänomen bei *parametererregten Schwingungen*, dass der *Hauptinstabilitätsbereich* mit seiner Spitze bei $\frac{\Omega}{2\omega} = 1$ endet¹⁴. *Nebeninstabilitätsbereiche*, die im Rahmen einer entkoppelten - also ungedämpften - Analyse bis zur horizontalen Achse reichen, sind in der Realität von untergeordneter Bedeutung. Dies hängt auch damit zusammen, dass die in der Praxis immer vorhandene Strukturdämpfung die Nebeninstabilitätsbereiche größtenteils zum Verschwinden bringt.

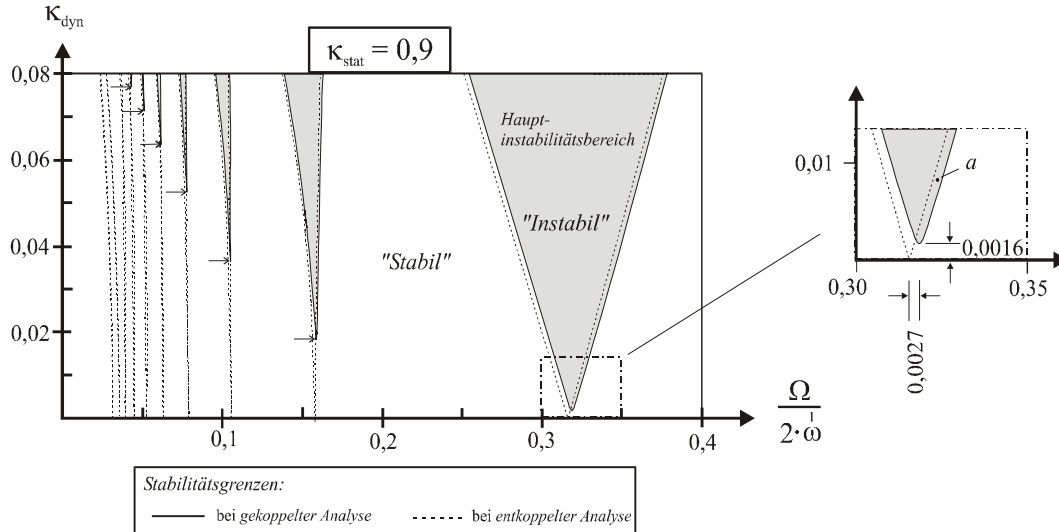


Abbildung 7.16: BB 3: Instabilitätsbereiche für $\kappa_{stat} = 0.9$

Erhöht man die statische Vorlast, auf 90 Prozent der kritischen, $\kappa_{stat} = \frac{T_{stat}}{T_{krit}} = 0.9$, so sind Abweichungen zwischen einer entkoppelten und einer gekoppelten Analyse deutlicher erkennbar, siehe Abbildung 7.16. Der aus der Kopplung resultierende Dämpfungseffekt bewirkt ein 'Wegdämpfen' der Spitzen nicht nur für Nebeninstabilitätsbereiche, sondern auch für den Hauptinstabilitätsbereich - wenn auch nur geringfügig. Zusätzlich ist aber auch noch - kopplungsbedingt - eine Verschiebung der Instabilitätsbereiche nach rechts erkennbar, die dazu führt, dass Bereiche in Abbildung 7.16 existieren, die erst bei Mitnahme des Kopplungseffektes auf kinetische Instabilität schließen lassen: In einem solchen Bereich liegt der Punkt *a* in Abbildung 7.16 (rechts). Der Kopplungseffekt wirkt somit zum einen *stabilisierend* - in Zusammenhang mit einer schwachen Dämpfung -, als auch *destabilisierend*, worauf auch in [50] hingewiesen wird.

Um die hier erzielten Berechnungsergebnisse kontrollieren zu können, haben wir sie in Abbildung 7.17 mit denen aus [50] verglichen. Es zeigt sich nicht nur im Rahmen einer entkoppelten, sondern auch einer gekoppelten Stabilitätsanalyse eine sehr gute Übereinstimmung. Dies ist insbesondere deshalb bemerkenswert, da in [50] zur Approximation der sich einstellenden Temperaturstörung T nur eine einzige Ansatzfunktion in Dickenrichtung θ^3 in der Rechnung mitgenommen wird.

¹⁴Siehe z.B. [41] und [28].

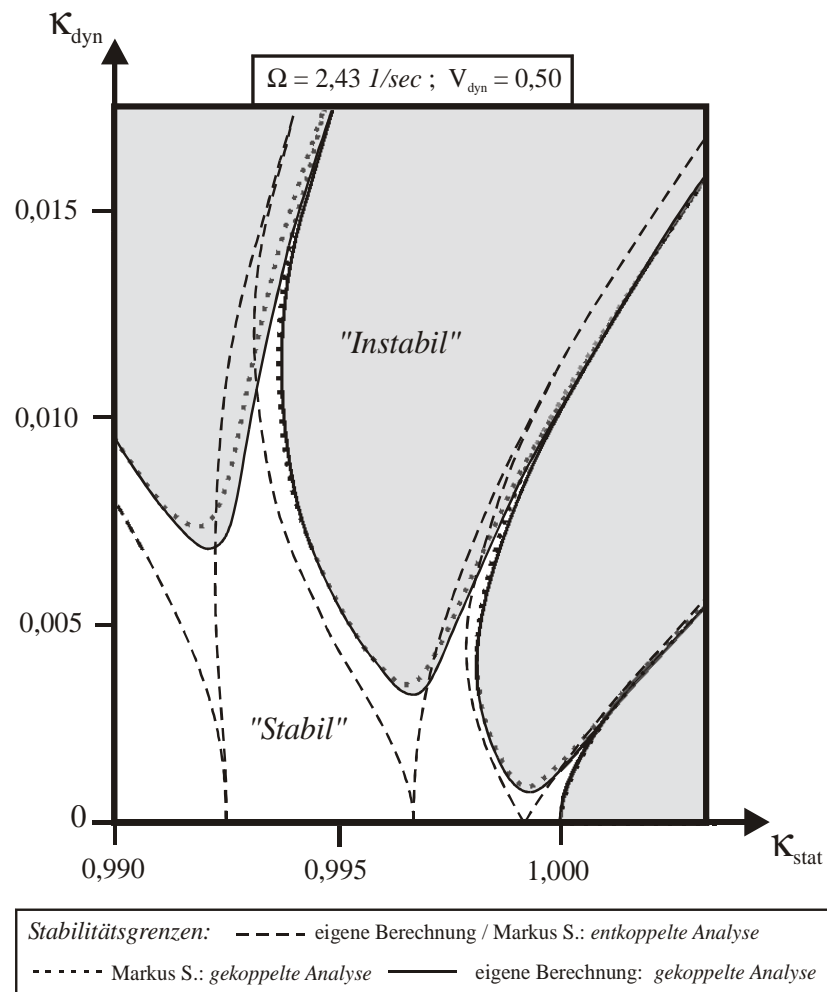


Abbildung 7.17: BB 3: Instabilitätsbereiche für $\Omega = 2.43$ - Vergleich mit [50]

Das Diagramm in Abbildung 7.17 ist für praktische Belange von geringer Bedeutung, da der Bereich für κ_{stat} sehr 'schmal' ist und mit der sehr niedrigen Erregerfrequenz $\Omega = 2.43$ nur Nebeninstabilitätsbereiche dargestellt sind.

Schlussbemerkungen und Ausblick

Die Berechnungsbeispiele zeigen, dass sich die hier formulierte thermoelastische Schalentheorie vielseitig anwenden lässt. So werden in Berechnungsbeispiel 1 zeitveränderliche Temperaturfelder und Schwingungen, hervorgerufen durch die schockartige Erwärmung einer Platte, ermittelt. Vergleichsrechnungen mit MSC/NASTRAN zeigen, dass das instationäre Problem der Wärmeleitung mittels dreidimensionaler Temperatureigenformen mit guter Näherung gelöst werden kann. Die schon in [26] festgestellte Tatsache, dass der Kopplungsterm eine Dämpfung thermoelastischer Schwingungen verursacht, kann auch hier verifiziert werden.

Im zweiten Anwendungsbeispiel, in dem eine Zylinderschale untersucht wird, kommt das 'Potenzial' der Schalentheorie, die auf dünne Schalen mit beliebiger Krümmung anwendbar ist, richtig zum Tragen. Das hier entwickelte Lösungsverfahren, das auch die für praktische Belange besonders relevanten Konvektionsrandbedingungen berücksichtigt, hat sich bewährt. Es wird gezeigt, dass in Verbindung mit solchen Randbedingungen ein Näherungsverfahren existiert, mit dem kopplungsbedingte Temperaturänderungen in Schalen abgeschätzt werden können: Mittels dieses Verfahrens gelingt die Berechnung der durch den elastischen Kopplungsterm hervorgerufenen Temperaturfelder, ohne dass hierzu eine aufwendige Lösung der Wärmeleitgleichung noch notwendig wäre. Ursächlich hierfür ist der mit (7.28) beschriebene direkte Zusammenhang zwischen Verformungen und Temperaturänderungen, dessen approximative Gültigkeit in Abbildung 7.11 gezeigt wird. Basierend auf diesem Zusammenhang könnte man durch genaue Temperaturmessungen an den Laibungsflächen schwingender Schalen Rückschlüsse ziehen auf die Formänderungen der Mittelfläche.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, führen in der Praxis thermische Beanspruchungen von Tragwerken nicht selten zu Stabilitätsproblemen. Auf der Basis einer kinetischen Stabilitätstheorie, wie sie in Kapitel 5 formuliert wird, kann ein weites Feld solcher Probleme abgedeckt werden. Dann sind auch Schalen unter zeitveränderlicher thermischer Beanspruchung berechenbar, die - wie in Abschnitt 7.3 exemplarisch gezeigt - unter bestimmten Belastungskombinationen kinetisch instabil werden können. Wie hier bei Mitnahme thermoelastischer Kopplungseinflüsse gezeigt wird, müssen im Rahmen einer thermomechanisch gekoppelten, kinetischen Stabilitätsanalyse auch Störungen in der Temperatur beachtet werden. Wie im Berechnungsbeispiel 3 gezeigt wird, resultieren hieraus sowohl stabilisierende, als auch destabilisierende Effekte für das Tragverhalten der Platte. Diese Effekte, die teilweise aus der thermoelastischen Dämpfung

heraus erklärbar sind, sind jedoch von geringem Einfluss, wenn lediglich der elastische Kopplungsterm Eingang in die Stabilitätsanalyse findet, und deshalb in der Praxis - vermutlich - von untergeordneter Bedeutung.

Interessant wäre es zweifellos, aufbauend auf der vorliegenden Arbeit weitere thermomechanische Kopplungseffekte in einer kinetischen Stabilitätsanalyse für Schalen zu berücksichtigen. Insbesondere *dissipative Phänomene*, wie sie in Verbindung mit inelastischem Materialverhalten entstehen, könnten bei schwingenden Systemen, die zu kinetischer Instabilität neigen, entsprechende Auswirkungen haben. Meines Wissens werden solche Phänomene, die auch praxisrelevant sein müssten, in der Literatur bislang nicht behandelt. Sinnvoll sind solche Untersuchungen sicherlich nur, wenn man eine kinetische Stabilitätstheorie anwendet, und auch Störungen in der Temperatur vorsieht. In diesem Sinne mag die vorliegende Arbeit Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen unter Einbeziehung inelastischer Materialgesetze in die Schalen- und Stabilitätstheorie sein. Obwohl das hier formulierte Lösungskonzept mit Eigenformen 'arbeitet', wäre - wie schon in der Einleitung angedeutet -, auch eine thermomechanisch gekoppelte Lösung mittels der FEM denkbar. Ausgangspunkte einer solchen Lösung wären dann die Integralgleichungen in (4.48) und (4.91), die sich unter anderem aus dem Prinzip der virtuellen Verrückung ergeben.

In der neueren Literatur zur Plastizitätstheorie wird das Bestreben erkennbar, diese durch die Thermodynamik abzusichern und auf ein breites theoretisches Fundament zu stellen. Diese Vorgehensweise hat zur Folge, dass zum einen Aspekte der Wärmelehre leicht integrierbar werden, und zum anderen sich neue Erkenntnisse durch Anwendung allgemeiner thermodynamischer Prinzipien ergeben. In diesem Zusammenhang sei insbesondere die *Thermodynamik irreversibler Prozesse* genannt, deren Schlussfolgerungen für die Aufstellung von Zustandsgleichungen maßgeblich sind.

In der vorliegenden Arbeit nehmen die Ausführungen über *Thermodynamik* wegen ihrer grundsätzlichen Bedeutung einen breiten Raum ein. In Verbindung mit der Kontinuumsmechanik und der Schalentheorie dient sie hier dazu, thermomechanische Kopplungseffekte systematisch zu erfassen und eine bestehende kinetische Stabilitätstheorie um solche Einflüsse zu erweitern.

Anhang A

Nachweis der Symmetrie des Spannungstensors

In Abschnitt 2.1.4 konnte die Forderung nach *Invarianz der inneren Energie* bei Überlagerung der ursprünglichen Bewegung mit einer beliebigen Starrkörperrotation ω_0 auf die folgende Form gebracht werden.

$$\tau^{ik} \underbrace{\mathbf{g}_k \cdot \dot{\mathbf{g}}_i}_{\dot{g}_{ik}} = \tau^{ik} \underbrace{\mathbf{g}_k \cdot \dot{\mathbf{g}}_i}_{\dot{g}_{ik}} . \quad (\text{A.1})$$

Im Folgenden werden wir hieraus die Symmetrie ($\tau^{ik} = \tau^{ki}$) des Spannungstensors ableiten.

In einem ersten Schritt werden wir nun zeigen, dass der Metriktensor g_{ik} ebenfalls eine invariante - also objektive - Größe darstellt: Bei Überlagerung mit einer Starrkörperbewegung ergibt sich die zeitliche Änderung dieses Tensors wegen (2.11)₂ und (2.36)₂ zu:

$$\dot{\underline{g}}_{ik} = \dot{\underline{g}}_i \cdot \mathbf{g}_k + \mathbf{g}_i \cdot \dot{\underline{g}}_k \quad \text{mit} \quad \dot{\underline{g}}_i = \dot{\mathbf{g}}_i + \omega_0 \times \mathbf{g}_i . \quad (\text{A.2})$$

Mit den Rechenregeln der Vektorrechnung (*Spatprodukt*) kann man daraus ableiten, dass gilt:

$$\dot{\underline{g}}_{ik} = \dot{\mathbf{g}}_i \cdot \mathbf{g}_k + \mathbf{g}_i \cdot \dot{\mathbf{g}}_k = \dot{g}_{ik} . \quad (\text{A.3})$$

Der Metriktensor ist also ebenso wie die innere Energie eine objektive Größe: Es tritt keine (zeitliche) Änderung bei einer überlagerten Starrkörperbewegung auf.

In einem zweiten Schritt spalten wir die unterklammerten Ausdrücke in (A.1) jeweils in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil auf:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_k \cdot \dot{\mathbf{g}}_i &= \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{g}_k \cdot \dot{\mathbf{g}}_i + \dot{\mathbf{g}}_k \cdot \mathbf{g}_i)}_{=\dot{g}_{ik}} + \frac{1}{2} (\mathbf{g}_k \cdot \dot{\mathbf{g}}_i - \dot{\mathbf{g}}_k \cdot \mathbf{g}_i) \\ \mathbf{g}_k \cdot \dot{\underline{g}}_i &= \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{g}_k \cdot \dot{\underline{g}}_i + \dot{\underline{g}}_k \cdot \mathbf{g}_i)}_{=\dot{\underline{g}}_{ik}} + \frac{1}{2} (\mathbf{g}_k \cdot \dot{\underline{g}}_i - \dot{\underline{g}}_k \cdot \mathbf{g}_i) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Setzt man nun (A.4) in (A.1) ein, so verbleibt wegen (A.3) nach einigen Umformungen:

$$\tau^{ik} \left(\mathbf{g}_k \cdot \dot{\mathbf{g}}_i + \dot{\mathbf{g}}_k \cdot \mathbf{g}_i \right) - \underbrace{\tau^{ik} \left(\dot{\mathbf{g}}_k \cdot \mathbf{g}_i + \mathbf{g}_k \cdot \dot{\mathbf{g}}_i \right)} = 0 . \quad (\text{A.5})$$

Nach Vertauschen der Indizes (i und k) in dem unterklammerten Term in (A.5) kann man zusammenfassend fordern:

$$\underbrace{(\tau^{ik} - \tau^{ki})} \left(\mathbf{g}_k \cdot \dot{\mathbf{g}}_i + \dot{\mathbf{g}}_k \cdot \mathbf{g}_i \right) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Für eine vollkommen beliebige Starrkörperrotation $\boldsymbol{\omega}_0$ kann die obige Gleichung nur dann erfüllt werden, wenn man fordert, dass der unterklammerte Ausdruck verschwindet. Diese Forderung führt auf die *Symmetrie des 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors*:

$$\tau^{ik} = \tau^{ki} . \quad (\text{A.7})$$

Anhang B

Formelzusammenstellung für die Schalentheorie

Basisvektoren der Mittelfläche im Ausgangs- und Momentanzustand:

$$\overset{+}{\mathbf{a}}_\alpha = \frac{\partial \overset{+}{\mathbf{r}}}{\partial \theta^\alpha}; \quad \mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} = \left(\overset{+}{\mathbf{r}} + \mathbf{v} \right)_{,\alpha} = \overset{+}{\mathbf{a}}_\alpha + \mathbf{v}_{,\alpha} \quad (\text{B.1})$$

Die folgenden Gleichungen (B.2)-(B.14) sind hier lediglich für den Ausgangszustand angegeben; die jeweiligen Beziehungen im Momentanzustand erhält man, indem man das aufgesetzte '+' weglässt.

Transformationsvorschrift für die Abbildung der Basisvektoren der Mittelfläche auf diejenigen des Schalenraumes:

$$\overset{+}{\mathbf{g}}_\alpha = \overset{+}{\mu}_\alpha^\beta \overset{+}{\mathbf{a}}_\beta \quad \text{und} \quad \overset{+}{\mathbf{g}}_3 = \overset{+}{\mathbf{a}}_3 \quad \text{mit} \quad \overset{+}{\mu}_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - \theta^3 \underbrace{b_\alpha^\beta}_{\text{Krümmungstensor}} \quad (\text{B.2})$$

Transformationskoeffizient $\overset{+}{\nu}_\beta^\alpha$ ('Kehrmatrix' des Shifters):

$$\overset{+}{\mathbf{g}}^\alpha = \overset{+}{\nu}_\beta^\alpha \overset{+}{\mathbf{a}}^\beta; \quad \overset{+}{\nu}_\beta^\alpha \overset{+}{\mu}_\alpha^\rho = \delta_\beta^\rho; \quad \overset{+}{\nu}_\beta^\alpha = \frac{-1}{\overset{+}{\mu}} \left(\overset{+}{\mu}_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \overset{+}{\mu}_\gamma^\gamma \right). \quad (\text{B.3})$$

Ableitungsvorschriften von Weingarten:

$$\overset{+}{\mathbf{a}}_{3,\alpha} = -\overset{+}{b}_\alpha^\rho \overset{+}{\mathbf{a}}_\rho \Rightarrow \overset{+}{b}_\alpha^\rho = -\overset{+}{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \overset{+}{\mathbf{a}}^\rho \quad (\text{wegen } \overset{+}{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \overset{+}{\mathbf{a}}^\beta = \delta_\alpha^\beta) \quad (\text{B.4})$$

Ableitungsvorschriften von Gauss:

$$\overset{+}{\mathbf{a}}_{\beta,\alpha} = \overset{+}{\Gamma}_{\beta\alpha}^\rho \overset{+}{\mathbf{a}}_\rho + \overset{+}{b}_{\beta\alpha} \overset{+}{\mathbf{a}}_3 \quad (\text{mit } \overset{+}{b}_{\beta\alpha} = \overset{+}{b}_\beta^\rho \overset{+}{a}_{\rho\alpha}) \quad (\text{B.5})$$

Christoffelsymbole:

$$\overset{+}{\Gamma}_{\beta\alpha}^\rho = \frac{1}{2} \overset{+}{a}^{\rho\lambda} \left(\overset{+}{a}_{\alpha\lambda,\beta} + \overset{+}{a}_{\beta\lambda,\alpha} - \overset{+}{a}_{\beta\alpha,\lambda} \right) \quad (\text{mit } \overset{+}{a}_{\rho\lambda} = \overset{+}{\mathbf{a}}_\rho \cdot \overset{+}{\mathbf{a}}_\lambda) \quad (\text{B.6})$$

Zusammenfassung der Ableitungsvorschriften in (B.4) und (B.5) unter Verwendung der Dreiindizesymbolen $\overset{+}{\Delta}_{i\alpha}^s$:

$$\overset{+}{\mathbf{a}}_{i,\alpha} = \overset{+}{\Delta}_{i\alpha}^s \overset{+}{\mathbf{a}}_s; \quad \text{mit} \quad \overset{+}{\Delta}_{i1}^s = \begin{bmatrix} \overset{+}{\Gamma}_{11}^1 & \overset{+}{\Gamma}_{11}^2 & \overset{+}{b}_{11} \\ \overset{+}{\Gamma}_{21}^1 & \overset{+}{\Gamma}_{21}^2 & \overset{+}{b}_{21} \\ -\overset{+}{b}_1^1 & -\overset{+}{b}_1^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overset{+}{\Delta}_{i2}^s = \begin{bmatrix} \overset{+}{\Gamma}_{12}^1 & \overset{+}{\Gamma}_{12}^2 & \overset{+}{b}_{12} \\ \overset{+}{\Gamma}_{22}^1 & \overset{+}{\Gamma}_{22}^2 & \overset{+}{b}_{22} \\ -\overset{+}{b}_2^1 & -\overset{+}{b}_2^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Metriktensor der Mittelfläche:

$$\overset{+}{a}_{\alpha\beta} = \overset{+}{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \overset{+}{\mathbf{a}}_\beta \quad (\text{B.8})$$

Zusammenhang zwischen Metriktensoren der Mittelfläche und denen des Schalenraumes:

$$\overset{+}{g}_{\alpha\beta} = \overset{+}{\mu}_\alpha^\rho \overset{+}{\mu}_\beta^\lambda \overset{+}{a}_{\rho\lambda}; \quad \overset{+}{g}^{\alpha\beta} = \overset{+}{\nu}_\rho^\alpha \overset{+}{\nu}_\lambda^\beta \overset{+}{a}^{\rho\lambda}. \quad (\text{B.9})$$

'Nicht-physikalische' Fläche eines infinitesimalen Elementes der Mittelfläche:

$$d\overset{+}{A} = \sqrt{\overset{+}{a}} d\theta^1 d\theta^2; \quad \overset{+}{a} = \det(\overset{+}{a}_{\alpha\beta}) \quad (\text{B.10})$$

Volumen eines infinitesimalen Volumenelementes im Schalenraum:

$$d\overset{+}{V} = \underbrace{\overset{+}{\mu} \sqrt{\overset{+}{a}}}_{\sqrt{\overset{+}{g}}} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3; \quad \overset{+}{\mu} = \det(\overset{+}{\mu}_\alpha^\beta) = 1 - 2\theta^3 \overset{+}{H} + (\theta^3)^2 \overset{+}{K}. \quad (\text{B.11})$$

Mittlere und Gaußsche Krümmung:

$$\overset{+}{H} = \frac{1}{2} \overset{+}{b}_\alpha^\alpha; \quad \overset{+}{K} = \det(\overset{+}{b}_\alpha^\beta). \quad (\text{B.12})$$

Normaleneinheitsvektor:

$$\overset{+}{\mathbf{a}}_3 = \frac{\overset{+}{\mathbf{a}}_1 \times \overset{+}{\mathbf{a}}_2}{|\overset{+}{\mathbf{a}}_1 \times \overset{+}{\mathbf{a}}_2|} = \frac{\overset{+}{\mathbf{a}}_1 \times \overset{+}{\mathbf{a}}_2}{\sqrt{\overset{+}{a}}} \quad (\text{B.13})$$

Permutationstensoren:

$$\overset{+}{\mathbf{a}}_\alpha \times \overset{+}{\mathbf{a}}_\beta = \overset{+}{\epsilon}_{\alpha\beta} \overset{+}{\mathbf{a}}_3; \quad \overset{+}{\epsilon}_{\alpha\beta} = \sqrt{\overset{+}{a}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \overset{+}{\epsilon}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{\overset{+}{a}}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Zerlegung vektorieller Größen der Mittelfläche in Richtung der Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^k \overset{+}{\mathbf{a}}_k; \quad \mathbf{p} = p^k \overset{+}{\mathbf{a}}_k; \\ \mathbf{n}^\alpha &= \underbrace{\overset{+}{n}^{\alpha\beta}}_{\text{Dehnungskräfte}} \overset{+}{\mathbf{a}}_\beta \sqrt{\overset{+}{a}} + \underbrace{\overset{+}{n}^{\alpha 3}}_{\text{Querkräfte}} \overset{+}{\mathbf{a}}_3 \sqrt{\overset{+}{a}}; \quad \mathbf{m}^\alpha = \underbrace{\overset{+}{m}^{\alpha\beta}}_{\text{Biege- u. Drillmomente}} \overset{+}{\mathbf{a}}_\beta \sqrt{\overset{+}{a}}; \\ \mathbf{K}_T &= K_T^k \overset{+}{\mathbf{a}}_k \sqrt{\overset{+}{a}}; \quad \mathbf{M}_T = M_T^k \overset{+}{\mathbf{a}}_k \sqrt{\overset{+}{a}} \quad (\text{siehe B.25}). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Mit $(B.15)_3$ kann man zeigen, dass im *vektoriellen Momentengleichgewicht* $(3.15)_2$ u.a. das *Gleichgewicht gegen Verdrehen um die Schalennormale*

$$\mathbf{a}_{3,\alpha} \times \mathbf{m}^\alpha + \mathbf{a}_\alpha \times n^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta \sqrt{a}^+ = \mathbf{0} \quad (B.16)$$

enthalten ist. Wie in [12] ausführlicher gezeigt wird, führt die Auswertung von (B.16) auf die folgende Komponentengleichung

$$\epsilon_{\alpha\beta} \underbrace{\left(n^{\alpha\beta} - b_\rho^\alpha m^{\rho\beta} \right)}_{= s^{\alpha\beta}} = 0 \quad (B.17)$$

und damit auf die Einführung einer Schnittgröße $s^{\alpha\beta}$. Wie mit $(B.14)_2$ - in diesem Fall für den Momentanzustand, also ohne '+' - leicht nachgewiesen werden kann, wird das Gleichgewicht gegen Verdrehen um die Schalennormale dann erfüllt, wenn $s^{\alpha\beta}$ eine *symmetrische Schnittgröße* ist:

$$s^{\alpha\beta} = s^{\beta\alpha}. \quad (B.18)$$

Partielle Ableitung des Verschiebungsvektors:

$$\mathbf{v}_{,\alpha} = \left(v^i \mathbf{a}_i \right)_{,\alpha} = v_{,\alpha}^i \mathbf{a}_i + v^i \mathbf{a}_{i,\alpha} = \underbrace{\left(v_{,\alpha}^i + v^s \Delta_{s\alpha}^i \right)}^+ \mathbf{a}_i \quad (B.19)$$

Der unterklammerte Ausdruck bezeichnet dann genau die kovarianten Ableitungen der Verschiebungskomponenten:

$$v^i \Big|_\alpha = v_{,\alpha}^i + v^s \Delta_{s\alpha}^i \quad (B.20)$$

Transformationsvorschrift für die Basisvektoren (Ausgangszustand \rightarrow Momentanzustand) unter Verwendung der Deformationskoeffizienten Φ_i^k :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= \left(\delta_i^k + \Phi_i^k \right) \mathbf{a}_k^+; \\ \Phi_\alpha^k &= v^k \Big|_\alpha; \quad \Phi_3^\beta = \left(-v^3 \Big|_\alpha + v^3 \Big|_\rho v^\rho \Big|_\alpha + \dots \right) \mathbf{a}^{\alpha\beta}{}^+; \quad \Phi_3^3 = -\frac{1}{2} v^3 \Big|_\alpha v^3 \Big|_\beta \mathbf{a}^{\alpha\beta}{}^+ + \dots \end{aligned} \quad (B.21)$$

Die kovarianten Ableitungen der Schnittgrößen:

$$n^{\alpha m} \Big|_\alpha = n_{,\alpha}^{\alpha m} + n^{\alpha s} \Delta_{s\alpha}^m + n^{\rho m} \Delta_{\rho\alpha}^\alpha; \quad m^{\alpha\beta} \Big|_\alpha = m_{,\alpha}^{\alpha\beta} + m^{\alpha\rho} \Delta_{\rho\alpha}^\beta + m^{\rho\beta} \Delta_{\rho\alpha}^\alpha. \quad (B.22)$$

'Schiefstellungseffekte' in den Schnittgrößen:

$$\Delta n^{\alpha m} = \Phi_s^m n^{\alpha s}; \quad \Delta m^{\alpha\beta} = \Phi_\rho^\beta m^{\alpha\rho} \quad (B.23)$$

Des weiteren ist in den Bewegungsgleichungen in Komponentenform enthalten:

$$\chi_3^\beta = \frac{\Phi_3^\beta}{1 + \Phi_3^3}; \quad \psi_\alpha^\beta = \chi_3^\beta \Phi_\alpha^3; \quad \Delta m^* = m^{\alpha\rho} b_{\rho\alpha}^+ + \Delta m^{\alpha 3} \Big|_\alpha. \quad (B.24)$$

Gemäß [12] gilt für die flächenbezogenen Komponenten der Trägheitsgrößen, siehe (B.15)_{5/6} wegen der Normalenhypothese:

$$K_T^k = \overset{+}{m}\overset{\bullet\bullet}{v}^k + \overset{+}{s}\overset{\bullet\bullet}{\Phi}_3^k; \quad M_T^k = \overset{+}{s}\overset{\bullet\bullet}{v}^k + \overset{+}{\Theta}\overset{\bullet\bullet}{\Phi}_3^k \quad (\text{B.25})$$

$$\overset{+}{m} = \overset{+}{\rho}h \left(1 + \overset{+}{K}h^2/12\right); \quad \overset{+}{s} = -\overset{+}{\rho}\overset{+}{H}h^3/6; \quad \overset{+}{\Theta} = \overset{+}{\rho}h^3 \left(1 + 3\overset{+}{K}h^2/20\right)/12.$$

Da die unterstrichenen Terme erfahrungsgemäß nur einen sehr geringen Einfluss auf die bei konkreten Berechnungen erzielten Ergebnisse haben, werden wir sie bei der Formulierung des PvV in Abschnitt 4.5 vernachlässigen.

Nichtlinearitäten in der Darstellung der Verzerrungen des Schalenraumes $\Gamma_{\alpha\beta}$ in Abhängigkeit der konstitutiven Variablen der Schalentheorie:

$$\Delta\Gamma_{\alpha\beta} = \theta^3 \left(\overset{+}{\mu}_\alpha^\rho \kappa_\beta^\lambda + \overset{+}{\mu}_\beta^\lambda \kappa_\alpha^\rho \right) \gamma_{\rho\lambda} + \left(\theta^3 \right)^2 \left(\frac{1}{2} \kappa_\alpha^\rho \kappa_\beta^\lambda \overset{+}{a}_{\rho\lambda} + \kappa_\alpha^\rho \kappa_\beta^\lambda \gamma_{\rho\lambda} \right). \quad (\text{B.26})$$

Flächenänderungen beim Übergang vom Ausgangs- in den Momentanzustand:

$$\sqrt{a} = (1 + \epsilon) \sqrt{\overset{+}{a}} \quad (\text{B.27})$$

Die Größe ϵ kann in Abhängigkeit von kovarianten Ableitungen der Verschiebungskomponenten dargestellt werden. Bei Abbruch nach quadratischen Nichtlinearitäten gilt:

$$\epsilon = v^\alpha|_\alpha + \frac{1}{2} \left(v^\alpha|_\alpha v^\beta|_\beta - v^\alpha|_\beta v^\beta|_\alpha + v^3|_\alpha v^3|_\beta \overset{+}{a}^{\beta\alpha} \right). \quad (\text{B.28})$$

Die Transformationsgrößen für den Tangenten- und den Binormalenvektor des schiefen Schalenrandes ergeben sich zu:

$$\gamma_t = \overset{+}{t}^\rho \overset{+}{t}^\lambda \gamma_{\rho\lambda}; \quad (\text{B.29})$$

$$\lambda_\beta^\alpha = 2 \left(\delta_\beta^\alpha \overset{+}{a}^{\pi\rho} - \delta_\beta^\rho \overset{+}{a}^{\alpha\pi} \right) \gamma_{\pi\rho} - \delta_\beta^\alpha (\epsilon + \gamma_t).$$

Die obigen Beziehungen wurden im Rahmen einer in den konstitutiven Variablen linearen Theorie formuliert. Geometrische Nichtlinearitäten in den Verschiebungskomponenten v^k gehen hier über die Beziehung (3.37) für $\gamma_{\rho\lambda}$ sowie (B.28) für ϵ ein.

Zur Stabilitätstheorie in Kapitel 5:

Störungsbedingte Änderungen des Deformationstensors:

allgemein: $\Phi_i^k = \bar{\Phi}_i^k - \overset{\circ}{\Phi}_i^k = \underset{(L)}{\Phi}_i^k + \underset{(G)}{\Phi}_i^k + \underset{(N)}{\Phi}_i^k$ und speziell...

$$\begin{aligned}
 \Phi_\alpha^k &= v^k|_\alpha + 0 + 0 \\
 \Phi_3^\pi &= -v^3|_\alpha \overset{+}{a}^{\alpha\pi} + \left(\overset{\circ}{v}^3|_\tau v^\tau|_\alpha + \overset{\circ}{v}^\tau|_\alpha v^3|_\tau \right) \overset{+}{a}^{\alpha\pi} + v^\tau|_\alpha v^3|_\tau \overset{+}{a}^{\alpha\pi} \\
 \Phi_3^3 &= \underbrace{0}_{\text{linear (L)}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(-\overset{\circ}{v}^3|_\alpha v^3|_\beta - \overset{\circ}{v}^3|_\beta v^3|_\alpha \right) \overset{+}{a}^{\alpha\beta}}_{\text{gekoppelt (G)}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(-v^3|_\alpha v^3|_\beta \right) \overset{+}{a}^{\alpha\beta}}_{\text{nichtlinear (N)}}
 \end{aligned} \tag{B.30}$$

Störungsbedingte Krümmungsänderungen der Mittelfläche:

$$\begin{aligned}
 \kappa_{\rho\lambda} &= \bar{\kappa}_{\rho\lambda} - \overset{\circ}{\kappa}_{\rho\lambda} = \underset{(L)}{\kappa}_{\rho\lambda} + \underset{(G)}{\kappa}_{\rho\lambda} + \underset{(N)}{\kappa}_{\rho\lambda} \\
 \text{mit } \underset{(L)}{\kappa}_{\rho\lambda} &= \left(\underset{(L)}{\Phi}_3^\pi|_\rho + \overset{+}{b}_\rho^\gamma \underset{(L)}{\Phi}_\gamma^\pi \right) \overset{+}{a}_{\pi\lambda} \\
 \underset{(G)}{\kappa}_{\rho\lambda} &= \left[\underset{(G)}{\Phi}_3^\pi|_\rho - \overset{+}{b}_\rho^\gamma \left(\overset{\circ}{\Phi}_\gamma^\pi \Phi_\tau^\tau + \overset{\circ}{\Phi}_\tau^\pi \Phi_\gamma^\pi \right) - \overset{\circ}{\Phi}_3^\gamma|_\rho \Phi_\gamma^\pi - \overset{\circ}{\Phi}_{\gamma(L)}^\pi \Phi_3^\gamma|_\rho \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \overset{+}{b}_\rho^\pi \left(\overset{\circ}{\Phi}_\tau^\gamma \Phi_\gamma^\tau + \overset{\circ}{\Phi}_\gamma^\tau \Phi_\tau^\gamma - \overset{\circ}{\Phi}_\gamma^\gamma \Phi_\tau^\tau - \overset{\circ}{\Phi}_\tau^\tau \Phi_\gamma^\gamma \right) \right] \overset{+}{a}_{\pi\lambda} \\
 \underset{(N)}{\kappa}_{\rho\lambda} &= \left[\underset{(N)}{\Phi}_3^\pi|_\rho - \overset{+}{b}_\rho^\gamma \Phi_\gamma^\pi \Phi_\tau^\tau - \overset{\circ}{\Phi}_3^\gamma|_\rho \Phi_\gamma^\pi - \frac{1}{2} \overset{+}{b}_\rho^\pi \left(\Phi_\tau^\gamma \Phi_\gamma^\tau - \Phi_\gamma^\gamma \Phi_\tau^\tau \right) \right] \overset{+}{a}_{\pi\lambda}
 \end{aligned} \tag{B.31}$$

Unterschiedliche Anteile im Kopplungsterm C in (5.23):

$$\begin{aligned}
 \underset{(L)}{C} &= \gamma^* T_0 \left(\overset{\bullet}{\gamma}_\beta^\beta + \theta^3 \overset{\bullet}{\kappa}_\rho^\lambda \overset{+}{\nu}_\lambda^\rho \right) \\
 \underset{(G)}{C} &= \gamma^* T_0 \left(\overset{\bullet}{\gamma}_\beta^\beta + \theta^3 \overset{\bullet}{\kappa}_\rho^\lambda \overset{+}{\nu}_\lambda^\rho \right) + \gamma^* \left(\overset{\circ}{T} - T_0 \right) \left(\overset{\bullet}{\gamma}_\beta^\beta + \theta^3 \overset{\bullet}{\kappa}_\rho^\lambda \overset{+}{\nu}_\lambda^\rho \right) + \gamma^* T \left[\overset{\bullet}{\gamma}_\beta^\beta + \overset{\bullet}{\gamma}_\beta^\beta + \theta^3 \left(\overset{\bullet}{\kappa}_\rho^\lambda + \overset{\bullet}{\kappa}_\rho^\lambda \right) \overset{+}{\nu}_\lambda^\rho \right] \\
 \underset{(N)}{C} &= \gamma^* T_0 \left(\overset{\bullet}{\gamma}_\beta^\beta + \theta^3 \overset{\bullet}{\kappa}_\rho^\lambda \overset{+}{\nu}_\lambda^\rho \right) + \gamma^* T \left[\overset{\bullet}{\gamma}_\beta^\beta + \overset{\bullet}{\gamma}_\beta^\beta + \theta^3 \left(\overset{\bullet}{\kappa}_\rho^\lambda + \overset{\bullet}{\kappa}_\rho^\lambda \right) \overset{+}{\nu}_\lambda^\rho \right]
 \end{aligned} \tag{B.32}$$

Anhang C

Zur Berechnung eindimensionaler Temperatureigenformen

Diese müssen die in Abschnitt 4.6 formulierte Differenzialgleichung (4.72)₂ erfüllen. Setzt man¹ $\sqrt{g^+} = 1$, so verbleibt:

$$\lambda \tau_{,33} - \Lambda \tau = 0. \quad (\text{C.1})$$

Bringt man diese *homogene Differenzialgleichung* auf die Form

$$\frac{\tau_{,33}}{\tau} = \frac{\Lambda}{\lambda} = -\kappa^2, \quad (\text{C.2})$$

so existiert hierfür die Lösung:

$$\tau(\theta^3) = C_1 \sin(\kappa \theta^3) + C_2 \cos(\kappa \theta^3) \quad (\text{C.3})$$

Der Ansatz (C.3) muss noch an die *homogenen thermischen Randbedingungen* am oberen und unteren Schalenrand angepaßt werden. Bei vorgegebenen Temperatur- bzw. Wärmestromrandbedingungen gestaltet sich die Anpassung von (C.3) an die homogenen Randbedingungen sehr einfach; es existieren für beide Fälle einfache *analytische Lösungen*, die auch in [26] angegeben werden: Die *eindimensionalen Temperatureigenformen* lauten dann:

$$\left. \begin{aligned} \frac{n}{\tau}(\theta^3) &= \cos\left(\frac{n\pi}{h}\theta^3\right) & (n = 1, 3, \dots) \\ \frac{n}{\tau}(\theta^3) &= \sin\left(\frac{n\pi}{h}\theta^3\right) & (n = 2, 4, \dots) \end{aligned} \right\} \text{ bei Temperaturrandbedingungen;}$$
$$\left. \begin{aligned} \frac{n}{\tau}(\theta^3) &= \sin\left(\frac{n\pi}{h}\theta^3\right) & (n = 1, 3, \dots) \\ \frac{n}{\tau}(\theta^3) &= \cos\left(\frac{n\pi}{h}\theta^3\right) & (n = 2, 4, \dots) \end{aligned} \right\} \text{ bei Wärmestromrandbedingungen.} \quad (\text{C.4})$$

¹Für die in Abschnitt 7.1 und 7.3 behandelten Platten gilt $\sqrt{g^+} = 1$ exakt und für den Zylinder in Abschnitt 7.2 wegen der geringen Schalendicke ($h = 0.002m$) mit guter Näherung.

Bei der in Abschnitt 7.2 behandelten Zylinderschale, siehe Abbildung 7.6, sind an der Innen- und Außenseite der Schale *Konvektionsrandbedingungen* vorgegeben. Dann müssen die eindimensionalen Temperatureigenformen eine Erfüllung der in (4.40)_{1/2} formulierten homogenen Randbedingungen ermöglichen. Dies gelingt - wie sich unter Beachtung von (4.67) und (4.68) leicht nachweisen lässt -, wenn man hier fordert:

$$-\lambda\tau_{,3} = \alpha_{(o)}\tau \quad \text{an der Innenseite } (\theta^3 = h/2) \text{ und} \quad (C.5)$$

$$\lambda\tau_{,3} = \alpha_{(u)}\tau \quad \text{an der Außenseite } (\theta^3 = -h/2) \text{ der Zylinderschale.}$$

Durch Einsetzen des Lösungsansatzes für $\tau(\theta^3)$, siehe (C.3), in die Randbedingungen (C.5) ergibt sich das folgende *homogene Gleichungssystem*:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\lambda\kappa \cos(\kappa h/2) - \alpha^{(o)} \sin(\kappa h/2) & \lambda\kappa \sin(\kappa h/2) - \alpha^{(o)} \cos(\kappa h/2) \\ \lambda\kappa \cos(\kappa h/2) + \alpha^{(u)} \sin(\kappa h/2) & \lambda\kappa \sin(\kappa h/2) - \alpha^{(u)} \cos(\kappa h/2) \end{bmatrix}}_{=\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{C}} = 0. \quad (C.6)$$

Die *nichttrivialen Lösungen* des Gleichungssystems ergeben sich für

$$\det(\mathbf{L}) = 0. \quad (C.7)$$

Zu den *Eigenwerten* $\overset{n}{\kappa}$ ($n = 1, 2, \dots$), die diese Bedingung erfüllen, gehören die jeweiligen *Eigenvektoren* $\overset{n}{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \overset{n}{C}_1, \overset{n}{C}_2 \end{bmatrix}^T$, die sich bei Normierung folgendermaßen berechnen:

$$\overset{n}{C}_1 = 1; \quad \overset{n}{C}_2 = \frac{\lambda\overset{n}{\kappa} \cos(\overset{n}{\kappa}h/2) + \alpha^i \sin(\overset{n}{\kappa}h/2)}{\lambda\overset{n}{\kappa} \sin(\overset{n}{\kappa}h/2) - \alpha^i \cos(\overset{n}{\kappa}h/2)} \quad (C.8)$$

Setzt man nun die $\overset{n}{\kappa}$ -Werte und die dazugehörigen Koeffizienten $\overset{n}{C}_1, \overset{n}{C}_2$ in den Lösungsansatz (C.3) ein, so erhält man die *eindimensionalen Temperatureigenformen bei Konvektionsrandbedingungen*:

$$\overset{n}{\tau}(\theta^3) = \sin(\overset{n}{\kappa}\theta^3) + \overset{n}{C}_2 \cos(\overset{n}{\kappa}\theta^3) \quad (C.9)$$

Bei der (numerischen) Berechnung der Eigenwerte und -formen sind die nachfolgend aufgeführten Punkte zu beachten:

1. Die Gleichung (C.7) hat unendlich viele Lösungen, d.h. es gibt unendlich viele Eigenwerte $\overset{n}{\kappa}$.
2. Zu jedem positiven Eigenwert $\overset{n}{\kappa}$ existiert auch ein betragsmäßig gleicher, negativer Eigenwert. Da aber - wie man nachweisen kann - das Vorzeichen der jeweiligen Eigenwerte keinen Einfluss auf den qualitativen Verlauf von $\overset{n}{\tau}(\theta^3)$ hat, kann auf die Berechnung negativer Eigenwerte und der entsprechenden Eigenformen verzichtet werden.

3. Auch der Eigenwert $\overset{0}{\kappa} = 0$ braucht nicht berücksichtigt zu werden, weil die dazugehörige Eigenform sich zu $\overset{0}{\tau}(\theta^3) = 0$ ergibt.
4. Konvergenzstudien haben gezeigt: Je größer die berechneten Eigenwerte sind, desto 'hochwertiger' sind die jeweiligen Eigenformen, was bei deren Mitnahme bei der Lösung der dynamischen Wärmeleitgleichung (als Ansatzfunktionen) wiederum zu verbesserten Ergebnissen führt.

Im Folgenden sollen die Eigenwerte und entsprechenden Eigenformen bestimmt werden, die der in Abschnitt 7.2 behandelten Zylinderschale zugeordnet sind. In diesem Zusammenhang benötigten wir neben der Schalendicke $h = 0.002m$ die folgenden thermischen Stoffkonstanten: $\alpha_{(o)} = 1000 \frac{W}{m^2 K}$; $\alpha_{(u)} = 200 \frac{W}{m^2 K}$; $\lambda = 50 \frac{W}{m K}$.

Zunächst werden die Eigenwerte $\overset{n}{\kappa}$ berechnet. Diese ergeben sich als Lösungen von (C.7). Man kann dieses mathematische Problem veranschaulichen, indem man $\det(\mathbf{L})$ als Funktion in Abhängigkeit von κ darstellt, siehe Abbildung C.1.

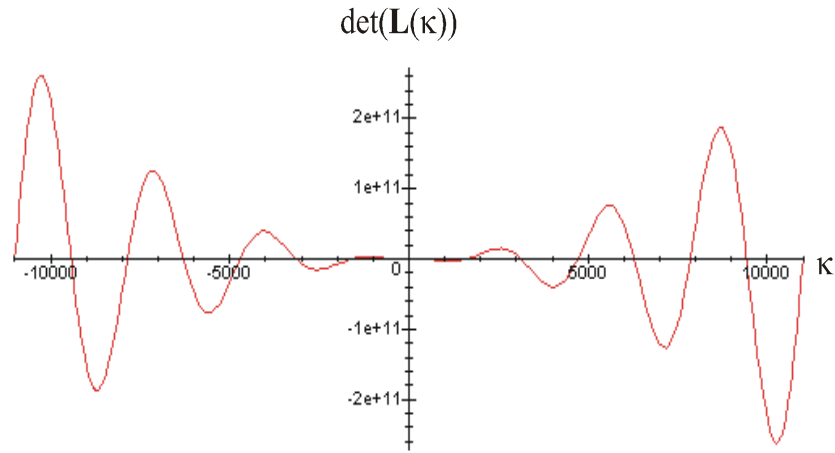


Abbildung C.1: graphische Darstellung von $\det(\mathbf{L}(\kappa))$

Die Schnittpunkte dieser Funktion mit der Abszisse liefern dann diejenigen Eigenwerte, für die die Bedingung $\det(\mathbf{L}) = 0$ erfüllt ist. Da eine analytische Lösung dieses Problems nicht mehr möglich ist, werden die *ersten 8 positiven Eigenwerte* im Bereich $0 < \kappa < 11000$ hier unter Einsatz eines kommerziellen Mathematik-Programms (*Maple V*) numerisch bestimmt:

$$\begin{aligned}
 \overset{1}{\kappa} &\approx 109.0374 ; & \overset{2}{\kappa} &\approx 1578.3986 ; & \overset{3}{\kappa} &\approx 3145.4077 ; & \overset{4}{\kappa} &\approx 4714.9341 ; \\
 \overset{5}{\kappa} &\approx 6285.0946 ; & \overset{6}{\kappa} &\approx 7855.5092 ; & \overset{7}{\kappa} &\approx 9426.0510 ; & \overset{8}{\kappa} &\approx 10996.6655 .
 \end{aligned}
 \tag{C.10}$$

Die hierzu gehörenden Eigenformen, die in Abbildung C.2 veranschaulicht werden, erhält man durch Einsetzen der jeweiligen Eigenwerte in (C.8) bzw. (C.9).

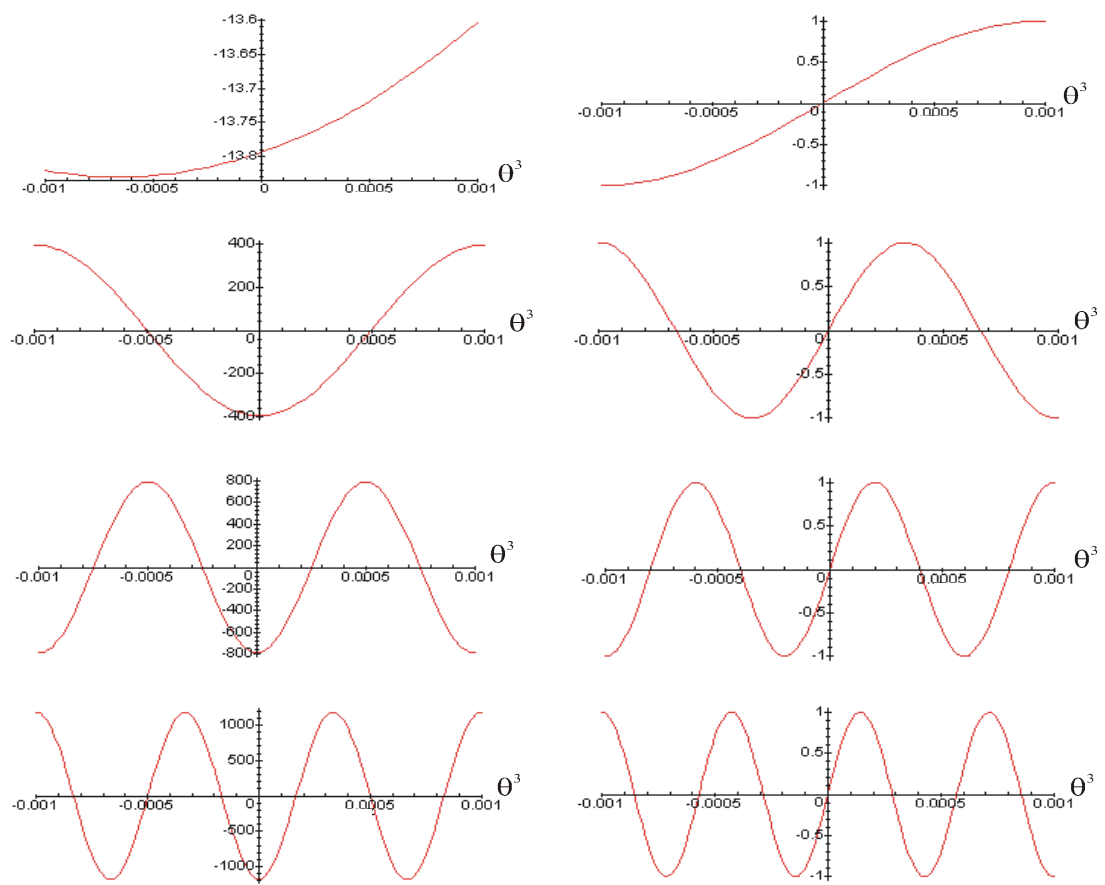


Abbildung C.2: eindimensionale Temperatureigenformen bei Konvektion

Anhang D

Zur Berechnung zweidimensionaler Temperatureigenformen mittels der FEM

Das hier dargestellte FE-Konzept zur numerischen Berechnung von zweidimensionalen Temperatureigenformen basiert auf [3]. Es sind hier nur die wesentlichen FE-Gleichungen dargestellt.

Für die in Abschnitt 7.1 und 7.3 behandelten Berechnungsbeispiele benötigen wir die zweidimensionalen Temperatureigenformen ϑ^n , die sich - wie in Abschnitt 4.6 beschrieben - als Lösungen von (4.72)₁ ergeben. Da wir es hier mit ebenen Flächentragwerken zu tun haben, lässt sich diese *homogene Differenzialgleichung* folgendermaßen darstellen:

$$\vartheta_{,\alpha\alpha} - \chi \vartheta = 0 \quad \text{mit} \quad \chi = \frac{\varphi^+ \rho c \sqrt{g^+} - \Lambda}{\lambda}. \quad (\text{D.1})$$

Für die thermischen Randbedingungen an den Randflächen des Flächentragwerks wollen wir die folgenden zwei Fälle vorsehen:

1. An den Randflächen entlang der Parameterlinie s sei die Temperatur $T(s, \theta^3, t)$ vorgegeben. Da diese (inhomogene) Randbedingung definitionsgemäß von der quasistatischen Lösung \check{T} erfüllt wird, verbleibt wegen $T = \check{T} + \tilde{T}$ für die dynamische Lösung die folgende *homogene Randbedingung*:

$$\tilde{T}(s, \theta^3, t) = 0 \quad \xRightarrow{(4.67/68)} \quad \vartheta(s) \tau(\theta^3) e^{\varphi t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta(s) = 0. \quad (\text{D.2})$$

2. An den Randflächen seien die einströmenden Wärmeströme $q_{(s)}(s, \theta^3, t)$ vorgegeben. Da dann ähnlich wie unter 1. die homogenen Randbedingungen formuliert werden, indem man die dynamischen Wärmeströme am Rande zu Null

setzt, folgt¹:

$$\begin{aligned}\tilde{h}^\alpha(s, \theta^3, t) \dot{n}_\alpha &= -\lambda \left[\tilde{T}(s, \theta^3, t) \right]_{,\alpha} \dot{n}_\alpha = -\lambda [\vartheta(s) \tau(\theta^3) e^{\varphi t}]_{,\alpha} \dot{n}_\alpha = 0 \\ \Rightarrow [\vartheta(s)]_{,\alpha} \dot{n}_\alpha &= 0 \quad (\sum \alpha!)\end{aligned}\tag{D.3}$$

Denkbar sind aber auch Mischformen aus den beiden Fällen unter 1. und 2.. So existieren bei dem Ersatzsystem in Abbildung 7.2. sowohl Ränder mit vorgegebenen Temperaturen, als auch Ränder mit vorgegebenen Wärmeströmen. Je nachdem, um welche Art der Randbedingung es sich hierbei handelt, muss dann

$$\vartheta(s) = 0 \quad \text{bzw.} \quad [\vartheta(s)]_{,\alpha} \dot{n}_\alpha = 0 \quad (\sum \alpha!)\tag{D.4}$$

als *homogene Randbedingung* gesetzt werden.

Zur Aufstellung der *Finite-Elemente-Gleichungen* ist es sinnvoll mit einer aus (C.1)₁ ableitbaren - und mit den Randbedingungen (D.4) kompatiblen - *Variationsformulierung*² zu arbeiten:

$$\delta I = 0 \quad \text{mit} \quad I = \frac{1}{2} \int_{(\dot{A})^+} [\vartheta_{,\alpha} \vartheta_{,\alpha} + \chi \vartheta \vartheta] d\dot{A} \quad (\sum \alpha!).\tag{D.5}$$

Die Auswertung von (D.5) liefert dann:

$$\delta I = \int_{(\dot{A})^+} \delta \vartheta_{,\alpha} \vartheta_{,\alpha} d\dot{A} + \chi \int_{(\dot{A})^+} \delta \vartheta \vartheta d\dot{A} = 0 \quad (\sum \alpha!).\tag{D.6}$$

Ersetzt man nun die Integration über die gesamte Mittelfläche \dot{A} durch die Summe aller Teilintegrationen über die einzelnen Flächen $\dot{A}^{(i)}$ der *Finiten Elemente*, so kann man anstelle von (C.6) auch schreiben:

$$\sum_i \left[\int_{\dot{A}^{(i)}} \delta \vartheta_{,\alpha}^{(i)} \vartheta_{,\alpha}^{(i)} d\dot{A} \right] + \chi \sum_i \left[\int_{\dot{A}^{(i)}} \delta \vartheta^{(i)} \vartheta^{(i)} d\dot{A} \right] = 0 \quad (\sum \alpha!).\tag{D.7}$$

Hierin bezeichnet $\vartheta^{(i)}$ die *Temperaturverteilung im i-ten Finiten Element*, für die wir in Abhängigkeit *lokaler Koordinaten* x und y den folgenden Ansatz machen:

$$\vartheta^{(i)}(x, y) = \boldsymbol{\phi}^{(i)}(x, y) \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\alpha}^{(i)} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}]^T\tag{D.8}$$

$$\text{und} \quad \boldsymbol{\phi}^{(i)}(x, y) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3].$$

Wir verwenden hier rechteckige Finite Elemente (Abmessungen l_x, l_y) mit vier - jeweils in den Ecken angeordneten - Knoten, siehe Abbildung D.1. In jedem Knoten führen wir

¹Siehe auch Abschnitt 4.4.1, Tabelle 4.1 und (7.5)₂.

²Siehe auch [3], [51].

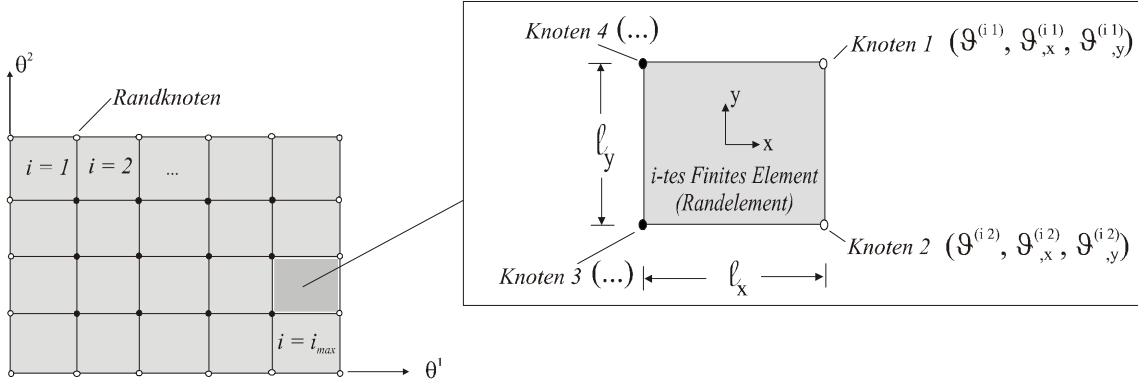


Abbildung D.1: Vernetzte Mittelfläche und Finites Element

nun jeweils drei *diskrete Knotenvariablen* ein: die Temperatur (z.B. im 1.Knoten des i -ten Elementes: $\vartheta^{(i1)}$) und die beiden partiellen Ableitungen der Temperatur bezüglich der lokalen Koordinaten x und y (z.B. $\vartheta_{,x}^{(i1)}$ und $\vartheta_{,y}^{(i1)}$). Dann muss jeweils in den Knoten des i -ten Elementes gelten:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta^{(i)}\left(\frac{l_x}{2}, \frac{l_y}{2}\right) &= \boldsymbol{\phi}^{(i)}\left(\frac{l_x}{2}, \frac{l_y}{2}\right) \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(i)} &= \vartheta^{(i1)} \\ \left[\vartheta^{(i)}\left(\frac{l_x}{2}, \frac{l_y}{2}\right)\right]_{,x} &= \left[\boldsymbol{\phi}^{(i)}\left(\frac{l_x}{2}, \frac{l_y}{2}\right)\right]_{,x} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(i)} &= \vartheta_{,x}^{(i1)} \\ \dots &\dots &\dots \\ \left[\vartheta^{(i)}\left(-\frac{l_x}{2}, \frac{l_y}{2}\right)\right]_{,x} &= \left[\boldsymbol{\phi}^{(i)}\left(-\frac{l_x}{2}, \frac{l_y}{2}\right)\right]_{,y} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(i)} &= \vartheta_{,y}^{(i4)} \end{aligned} \right\} \mathbf{A}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(i)} = \boldsymbol{\vartheta}^{(i)}$$

mit dem *Vektor der diskreten Knotenvariablen*: $\boldsymbol{\vartheta}^{(i)} = [\vartheta^{(i1)}, \vartheta_{,x}^{(i1)}, \dots, \vartheta_{,y}^{(i4)}]^T$. (D.9)

Löst man in (D.9) nach $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ auf und setzt in (D.8) ein, so erhält man

$$\vartheta^{(i)}(x, y) = \mathbf{H}^{(i)}(x, y) \cdot \boldsymbol{\vartheta}^{(i)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}^{(i)}(x, y) = \boldsymbol{\phi}^{(i)}(x, y) \cdot [\mathbf{A}^{(i)}]^{-1}$$

(D.10)

und die partiellen Ableitungen

$$\left[\vartheta^{(i)}(x, y)\right]_{,\alpha} = \mathbf{B}_{(\alpha)}^{(i)}(x, y) \cdot \boldsymbol{\vartheta}^{(i)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}_{(\alpha)}^{(i)}(x, y) = \left[\mathbf{H}^{(i)}(x, y)\right]_{,\alpha}.$$

Die Interpolationsmatrizen $\mathbf{H}^{(i)}(x, y)$ bzw. $\mathbf{B}_{(\alpha)}^{(i)}(x, y)$ *verknüpfen* die diskreten Knotenvariablen mit der Temperaturverteilung bzw. deren partiellen Ableitungen im Elementinneren.

Die Gleichungen (D.10)_{1/3} können auch dahingehend abgeändert werden, dass man anstelle des lokalen Vektors der diskreten Knotenvariablen $\boldsymbol{\vartheta}^{(i)}$ den *globalen Knotenvektor*

$$\boldsymbol{\vartheta} = [\vartheta^{(11)}, \vartheta_{,x}^{(11)}, \dots, \vartheta_{,y}^{(i_{max}4)}]^T \quad (D.11)$$

verwendet, der alle diskreten Knotenvariablen der Mittelfläche enthält. Ohne den Zusatz (x, y) können wir dann anschreiben:

$$\vartheta^{(i)} = \mathbf{H}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\vartheta} ; \quad \vartheta_{,\alpha}^{(i)} = \mathbf{B}_{(\alpha)}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\vartheta} . \quad (\text{D.12})$$

Die FE-Gleichungen (D.12) können nun in (D.7) eingesetzt werden. Dann muss gelten:

$$\begin{aligned} & \delta \boldsymbol{\vartheta}^T \sum_i \underbrace{\left\{ \int_{\overset{+}{A}^{(i)}} \left[\mathbf{B}_{(1)}^{(i)} \right]^T \cdot \mathbf{B}_{(1)}^{(i)} + \left[\mathbf{B}_{(2)}^{(i)} \right]^T \cdot \mathbf{B}_{(2)}^{(i)} \right] d\overset{+}{A}^{(i)} \right\}}_{=\sum_i \mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{K}} \boldsymbol{\vartheta} + \\ & \delta \boldsymbol{\vartheta}^T \chi \sum_i \underbrace{\left\{ \int_{\overset{+}{A}^{(i)}} \left[\mathbf{H}^{(i)} \right]^T \cdot \mathbf{H}^{(i)} d\overset{+}{A}^{(i)} \right\}}_{=\sum_i \mathbf{L}^{(i)} = \mathbf{L}} \boldsymbol{\vartheta} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Der globale Vektor der Knotenvariablen $\boldsymbol{\vartheta}$ kann in (D.13) sowohl aus dem Integral-, als auch aus dem Summenausdruck herausgezogen werden, weil er von den lokalen Koordinaten x und y unabhängig und für alle Elemente des Flächentragwerks identisch ist. Wir erhalten dann:

$$\delta \boldsymbol{\vartheta}^T \cdot [\mathbf{K} + \chi \mathbf{L}] \cdot \boldsymbol{\vartheta} = 0 . \quad (\text{D.14})$$

In (D.14) müssen nun noch die homogenen Randbedingungen berücksichtigt werden. Dies bedeutet z.B. für das in Abbildung D.1 dargestellte Randelement, dass bei vorgegebenen Temperaturen am Rande die Temperaturen in den Knoten 1 und 2 zu Null gesetzt werden müssen, siehe (D.2):

$$\vartheta^{(i\,1)} = 0 \quad \text{und} \quad \vartheta^{(i\,2)} = 0 . \quad (\text{D.15})$$

Und für den Fall, dass die Wärmeströme am Rand vorgegeben sind, gilt nach Auswertung von (D.3) für das dargestellte Randelement:

$$\vartheta_{,x}^{(i\,1)} = 0 \quad \text{und} \quad \vartheta_{,x}^{(i\,2)} = 0 . \quad (\text{D.16})$$

Setzt man also je nach Art der Randbedingungen die entsprechenden Knotenvariablen der Randelemente in $\boldsymbol{\vartheta}$ sowie $\delta \boldsymbol{\vartheta}$ zu Null und berücksichtigt man, dass die verbliebenen Variationen in $\delta \boldsymbol{\vartheta}$ beliebig und voneinander unabhängig sind, so kann man zur Erfüllung von (D.14) fordern:

$$[\mathbf{K}^* + \chi \mathbf{L}^*] \cdot \boldsymbol{\vartheta}^* = 0 . \quad (\text{D.17})$$

Nach Einbau der homogenen Randbedingungen gehen die Matrizen \mathbf{K} , \mathbf{L} und $\boldsymbol{\vartheta}$ über in \mathbf{K}^* , \mathbf{L}^* und $\boldsymbol{\vartheta}^*$, in denen diejenigen Zeilen bzw. Spalten gestrichen werden, die den verschwindenden Knotenvariablen der Randelemente zugeordnet sind, siehe z.B. (D.15/16).

Die Lösung des *Eigenwertproblems*³ (D.17) liefert *Eigenwerte* χ^n und die ihnen zugeordneten *Eigenvektoren* ϑ^{*n} . Man kann nun die vorher gestrichenen Nullen wieder einfügen:

$$\vartheta^{*n} \rightarrow \vartheta^n \quad \text{mit} \quad \vartheta^n = \left[\vartheta^{(11)n}, \vartheta_{,x}^{(11)n}, \dots, \vartheta_{,y}^{(i_{max}4)n} \right]^T. \quad (\text{D.18})$$

Dann enthält ϑ^n die zur n-ten Eigenform gehörenden Temperaturen und deren partielle Ableitungen⁴ in allen Knoten der Mittelfläche.

Zur Veranschaulichung des oben Gesagten sollen nun die zu einem konkreten System und dessen Randbedingungen gehörenden zweidimensionalen Temperatureigenformen graphisch veranschaulicht werden: Bei dem in Abschnitt 7.1 gewählten Ersatzsystem⁵ sind sowohl Temperaturen, als auch Wärmeströme an den Randflächen vorgegeben. Eine qualitative Darstellung der ersten 5 Eigenformen, die sich bei Auswertung der FE-Gleichungen unter Beachtung der Randbedingungen ergeben, findet sich in Abbildung D.2.

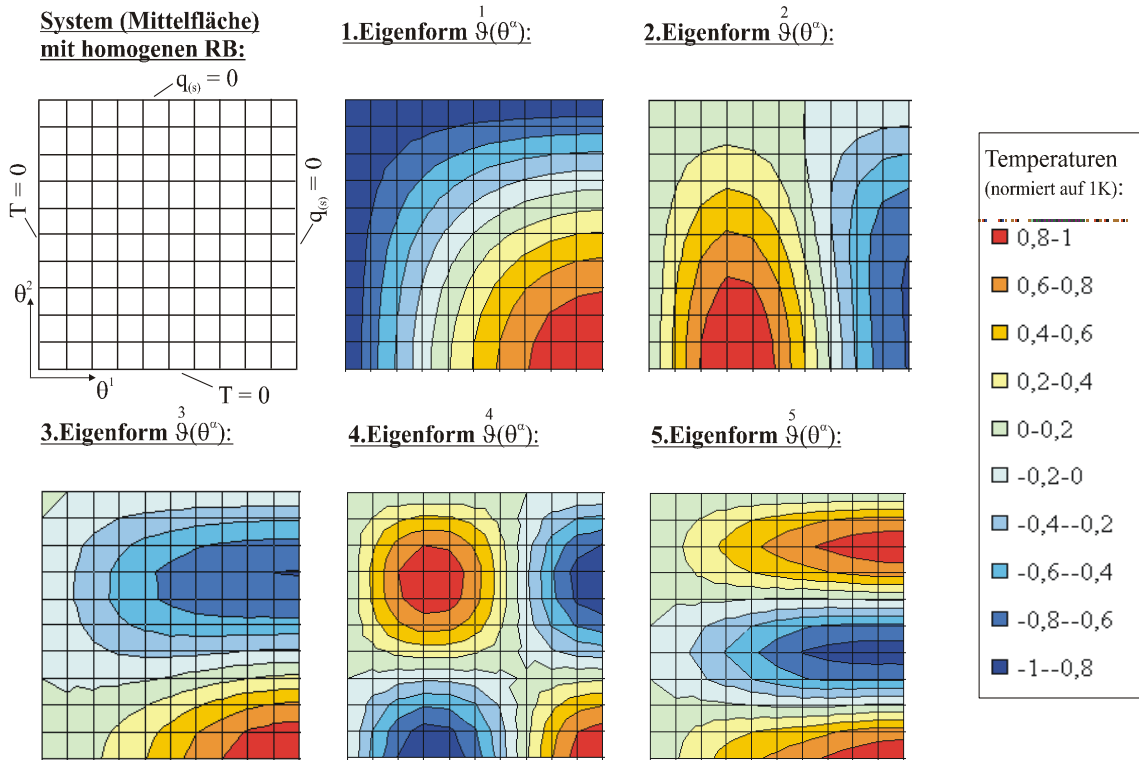


Abbildung D.2: Zweidimensionale Temperatureigenformen zu dem System in Abbildung 7.2

³Wir verwenden hierzu die NAG-Routine F02AEF in einem eigens entwickelten FORTRAN-Programm, siehe Kapitel 6.

⁴Die partiellen Ableitungen $(\dots)_{,x}$ und $(\dots)_{,y}$ in (D.18) können durch $(\dots)_{,1}$ und $(\dots)_{,2}$ ersetzt werden, siehe Abbildung D.1.

⁵Siehe Abbildung 7.2.

Anhang E

Stoffgesetze für Wärmeströme, abgeleitet aus dem Fourierschen Gesetz der Wärmeleitung

Die pro differentieller Zeitspanne Dt durch die Stirnfläche dA eines *Tetraederelementes*, siehe Abbildung E.1, hindurchströmende Wärmemenge $\dot{Q} = DQ/Dt$ berechnet sich gemäß dem in Abschnitt 1.4.1 formulierten *Fourierschen Gesetz der Wärmeleitung* zu¹

$$\dot{Q} = \mathbf{q} \cdot \underbrace{\mathbf{N}dA}_{d\mathbf{A}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad}(T) = -\lambda T_{,k} \mathbf{g}^k. \quad (\text{E.1})$$

Wie in [19] an einem Tetraederelement gezeigt, lässt sich der *Flächenvektor* $d\mathbf{A}$ folgendermaßen aufspalten:

$$2 d\mathbf{A} = dA_i \mathbf{g}^i \quad \underbrace{\Rightarrow}_{(\text{E.1})} \quad \dot{Q} = -\frac{1}{2} \lambda T_{,k} dA_i g^{ki}. \quad (\text{E.2})$$

Der *1.Hauptsatz der Thermodynamik* liefert für das in Abbildung E.1 dargestellte Tetraederelement die folgende Bilanzgleichung²:

$$\dot{Q} = \overset{1}{\dot{Q}} + \overset{2}{\dot{Q}} + \overset{3}{\dot{Q}} \quad (\text{E.3})$$

In (2.14) werden die *flächenbezogenen Wärmeströme* h^k eingeführt. Wegen der dreiecksförmigen Seitenflächen des Tetraederelementes in Abbildung E.1 muss hier - abweichend zu (2.14) - der Faktor $\frac{1}{2}$ eingeführt werden. Nach Einsetzen in (E.3) liefert der 1.Hauptsatz dann

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} h^k d\overset{+}{A}_k. \quad (\text{E.4})$$

¹Gemäß [64] berechnet sich der *Gradient* eines skalarwertigen Feldes a zu $\operatorname{grad}(a) = a_{,k} \mathbf{g}^k$.

²Volumenbezogene Größen (z.B. DH) sind hier *von höherer Ordnung klein* gegenüber den flächenbezogenen und können deshalb gestrichen werden.

Ersetzt man hierin nichtphysikalische Flächen des Ausgangszustandes durch diejenigen des Momentanzustandes, so kann man auch schreiben:

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} h^k \sqrt{\frac{\overset{+}{g}}{g}} dA_k. \quad (\text{E.5})$$

Setzt man nun $(E.2)_2$ mit (E.5) gleich, so ergibt sich das *nichtlineare Stoffgesetz für die Wärmeströme*:

$$h^i = -\lambda T_{,k} g^{ki} \sqrt{\frac{\overset{+}{g}}{g}}. \quad (\text{E.6})$$

Bei *Linearisierung* - dann gilt näherungsweise: $g^{ki} = \overset{+}{g}^{ki}$ und $\sqrt{\frac{\overset{+}{g}}{g}} = 1$ - geht dieses Stoffgesetz über in

$$h^i = \hat{h}^i(T_{,k}) = -\lambda T_{,k} \overset{+}{g}^{ki}. \quad (\text{E.7})$$

Bei konstanter Wärmeleitfähigkeit λ hängen die Wärmeströme dann nur noch von den partiellen Ableitungen $T_{,k}$ der Temperaturfelder im Kontinuum ab. Das (nichtlineare) Stoffgesetz (E.6) wird in der vorliegenden Arbeit nicht weiterverwendet. Wie in [26], so wird auch hier die lineare Beziehung (E.7) in die gekoppelte Wärmeleitgleichung einbauen.

Mit den *Nichtlinearitäten* in (E.6) kann eine Kopplung zwischen Wärmeströmen und Verformungen erfaßt werden.

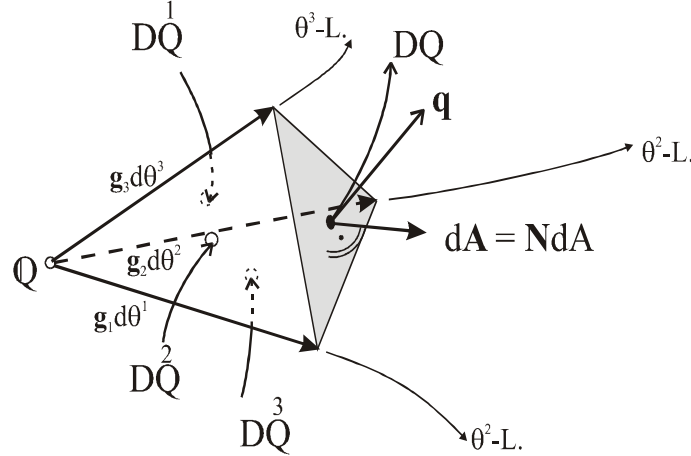


Abbildung E.1: Ein- und ausströmende Wärmemengen während der Zeit Dt am Tetraederelement (Einströmende Wärmemengen in Richtung positiver Koordinatenlinien θ^k erhalten ein positives Vorzeichen)

Anhang F

Aufbau der Koeffizientenmatrizen \mathbf{X}_T und \mathbf{X}_{2T}

Im Folgenden gilt:

$$\mathbf{J}_m = \mathbf{E} + \kappa_{stat} \mathbf{G} - \mathbf{H} \left(\frac{m\Omega}{2} \right)^2 \quad (\text{F.1})$$

Koeffizientenmatrix \mathbf{X}_T bei Verwendung *periodischer Lösungsansätze* von 6-ter Ordnung ($m_{max} = 6$ in (7.54)_{1/2}):

$$\mathbf{X}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_6 & \mathbf{c}_6 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{b}_0 & \mathbf{d}_0 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{d}_2 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{d}_4 & \mathbf{b}_6 & \mathbf{d}_6 \\ 0 & \mathbf{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\mathbf{D}\Omega & -3\mathbf{A}\Omega \\ \mathbf{J}_6 & \mathbf{F} & \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\mathbf{D}\Omega & -2\mathbf{A}\Omega & 0 & 0 \\ \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 & \mathbf{J}_4 & \mathbf{F} & \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B} & 0 & 0 & -\mathbf{D}\Omega & -\mathbf{A}\Omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 & \mathbf{J}_2 & \mathbf{F} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{J}_0 & \mathbf{F} & \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}\Omega & \mathbf{A}\Omega & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{J}_2 & \mathbf{F} & \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mathbf{D}\Omega & 2\mathbf{A}\Omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 & \mathbf{J}_4 & \mathbf{F} & \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 \\ 3\mathbf{D}\Omega & 3\mathbf{A}\Omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 & \mathbf{J}_6 & \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (\text{F.2})$$

Koeffizientenmatrix \mathbf{X}_{2T} bei Verwendung *antiperiodischer Lösungsansätze* von 5-ter Ordnung ($m_{max} = 5$ in $(7.54)_{3/4}$):

$$\mathbf{X}_{2T} =$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} \mathbf{a}_5 & \mathbf{c}_5 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{d}_1 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{d}_3 & \mathbf{b}_5 & \mathbf{d}_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & \mathbf{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5\mathbf{D}\Omega}{2} & -\frac{5\mathbf{A}\Omega}{2} \\ \mathbf{J}_5 & \mathbf{F} & \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3\mathbf{D}\Omega}{2} & -\frac{3\mathbf{A}\Omega}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 & \mathbf{J}_3 & \mathbf{F} & \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B} & -\frac{\mathbf{D}\Omega}{2} & -\frac{\mathbf{A}\Omega}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 & \mathbf{J}_1 - \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & \mathbf{F} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mathbf{D}\Omega}{2} & \frac{\mathbf{A}\Omega}{2} & 0 & \mathbf{B} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{J}_1 + \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & \mathbf{F} & \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\mathbf{D}\Omega}{2} & \frac{3\mathbf{A}\Omega}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 & \mathbf{J}_3 & \mathbf{F} & \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 \\ \frac{5\mathbf{D}\Omega}{2} & \frac{5\mathbf{A}\Omega}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa_{dyn}\mathbf{G}}{2} & 0 & \mathbf{J}_5 & \mathbf{F} \end{array} \right] \end{array} \quad (\text{F.3})$$

Anhang G

Zu den Berechnungsbeispielen

Berechnungsbeispiel 1:

Kopplungsterm im Zeitdifferenzialgleichungssystem (7.11):

$$\begin{aligned} \check{C}^l(t) = & \underbrace{\dot{g}(t) \check{E}^l - \sum_n^{n_{max}} \left[T_0^{ln} \check{L}^n \dot{h}(t) \right]}_{\text{lineare Anteile}} + \\ & \underbrace{g(t) \dot{g}(t) \check{G}^l + g(t) \sum_n^{n_{max}} \left[\check{H}^{ln} \dot{h}(t) \right] + \dot{g}(t) \sum_k^{k_{max}} \left[\check{I}^{lk} f(t) \right] + \sum_k^{k_{max}} \sum_n^{n_{max}} \left[\check{J}^{lkn} f(t) \dot{h}(t) \right]}_{\text{nichtlineare Anteile}} \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

Skalarwertige Koeffizienten des Zeitdifferenzialgleichungssystems (7.11):

$$\begin{aligned} \check{A}^l &= \overset{+}{\rho} c \int_{(\overset{+}{V})}^l T \check{T} d\overset{+}{V} ; \quad \check{B}^l = \lambda \int_{(\overset{+}{V})}^l T_{,k} \check{T}_{,k} d\overset{+}{V} \quad (\sum k!) ; \quad \check{D}^l = -\overset{+}{\rho} c \int_{(\overset{+}{V})}^l T \check{T} d\overset{+}{V} ; \\ \check{E}^l &= -\gamma^* T_0 \int_{(\overset{+}{V})}^l T \theta^3 \check{v}_{,\alpha\alpha}^3 d\overset{+}{V} \quad (\sum \alpha!) ; \quad \check{G}^l = -\gamma^* \int_{(\overset{+}{V})}^l T \check{T} \theta^3 \check{v}_{,\alpha\alpha}^3 d\overset{+}{V} ; \\ \check{H}^{ln} &= -\gamma^* \int_{(\overset{+}{V})}^l T \check{T} \theta^3 \check{v}_{,\alpha\alpha}^3 ; \quad \check{I}^{lk} = -\gamma^* \int_{(\overset{+}{V})}^l T \check{T} \theta^3 \check{v}_{,\alpha\alpha}^3 d\overset{+}{V} ; \quad \check{J}^{lkn} = -\gamma^* \int_{(\overset{+}{V})}^l T \check{T} \theta^3 \check{v}_{,\alpha\alpha}^3 d\overset{+}{V} ; \\ \check{L}^{ln} &= \gamma^* \int_{(\overset{+}{V})}^l T \theta^3 \check{v}_{,\alpha\alpha}^3 d\overset{+}{V} ; \quad \check{N}^n = \overset{+}{\rho} h \int_{(\overset{+}{A})} \check{v}^3 \check{v}^3 d\overset{+}{A} \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

Berechnungsbeispiel 2:

Kopplungsterm im Zeitdifferenzialgleichungssystem:

$$\check{C}^l(t) = \dot{g}(t) \check{E}^l + \sum_n^{n_{max}} \left[\check{F}^{ln} \dot{h}(t) \right] \quad (\text{G.3})$$

Zeitunabhängige Koeffizienten des Zeitdifferenzialgleichungssystems:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^l &= 2r\pi \overset{+}{\rho} c \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \overset{l}{T} \overset{l}{T} d\theta^3 d\theta^1 ; \quad \tilde{B}^l = 2r\pi \lambda \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \left(\overset{l}{T}_{,1} \overset{l}{T}_{,1} + \overset{l}{T}_{,3} \overset{l}{T}_{,3} \right) d\theta^3 d\theta^1 ; \\
\tilde{E}^l &= 2r\pi \gamma^* \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \overset{l}{T} \left(\check{v}_{,1}^1 - \theta^3 \check{v}_{,11}^3 - \frac{1}{r} \check{v}^3 \right) d\theta^3 d\theta^1 ; \\
\overset{ln}{\tilde{F}} &= 2r\pi \gamma^* \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \overset{l}{T} \left(\overset{n}{v}_{,1}^1 - \theta^3 \overset{n}{v}_{,11}^3 - \frac{1}{r} \overset{n}{v}^3 \right) d\theta^3 d\theta^1 ; \\
\overset{ln}{\tilde{N}} &= 2r\pi \overset{+}{\rho} h \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \left(\check{v}^1 \check{v}^1 + \check{v}^3 \check{v}^3 \right) d\theta^3 d\theta^1 ; \\
\overset{ln}{\tilde{L}} &= 2r\pi \gamma^* \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \left[\overset{l}{T} \left(\frac{1}{r} \overset{n}{v}^3 - \overset{n}{v}_{,1}^1 \right) + \overset{l}{T} \theta^3 \left(\overset{n}{v}_{,11}^3 + \frac{1}{r} \overset{n}{v}_{,1}^1 \right) \right] d\theta^3 d\theta^1
\end{aligned} \tag{G.4}$$

Literaturverzeichnis

- [1] Backhausen-Valkenier U.: *Untersuchung biegebeanspruchter Platten unter schockartiger Temperaturbelastung*. Dissertation, Fachbereich Bautechnik, Bergische Universität GH - Wuppertal (1993)
- [2] Almroth B.O., Bailie J.A., Stanley G.M: *Vibration Analysis of Heated Plates*. AIAA Journal Vol.15, No.12 (1977) S.1691-1695
- [3] Bathe K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag (1990)
- [4] Baehr H.D., Stephan K.: *Wärme- und Stoffübertragung*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag (1996)
- [5] Basar Y., Krätzig W.B.: *Mechanik der Flächentragwerke*. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr.Vieweg& Sohn (1985)
- [6] Betten J.: *Kontinuumsmechanik*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag (1993)
- [7] Bode J.: *Die Ermittlung von Temperatureigen Spannungszuständen in der Mikro-mechanik faserverstärkter Verbundwerkstoffe*. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Gebiet Technische Mechanik und Flächentragwerke, Universität der Bundeswehr München (1996)
- [8] de Boer R: *Die physikalische und thermodynamische Begründung plastischer und viskoser Werkstoffe*. Seminar über Thermodynamik und Kontinuumsmechanik, Seminarberichte des Lehrstuhls für Baumechanik der Technischen Universität Hannover, Bericht-Nr. 73 - S 1 (1973)
- [9] de Boer R.: *Theory of Porous Media*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag (2000)
- [10] Bronstein I.N., Semendjajew K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Stuttgart/Leipzig: B.G. Teubner (1991)
- [11] Bruhns O., Sluzalec A.: *Thermal effects in thermo-plastic metal with internal variables*. Computers & Structures 33 (6) (1989), S.1459-1464
- [12] Büllesbach J.: *Formulierung und Anwendung einer nichtlinearen kinetischen Stabilitätstheorie für Schalen beliebiger Geometrie*. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Gebiet Technische Mechanik und Flächentragwerke, Universität der Bundeswehr München (1998)

- [13] Cho H., Kardomateas G.A.: *Thermal Shock stresses due to heat convection at a bounding surface in a thick orthotropic cylindrical shell*. Int. J. Solids Structures 38 (2001), S.2769-2788
- [14] McCracken D.D.: *Computerpraxis mit FORTRAN 77 in Naturwissenschaft und Technik*. München/Wien: Carl Hanser Verlag (1985)
- [15] Dankert J.: *Numerische Methoden der Mechanik*. Wien/New York: Springer-Verlag (1977)
- [16] Diezmann S.: *Stabilitätsuntersuchungen für thermisch beanspruchte, dünne Flächentragwerke*. Diplomarbeit am Institut für Mechanik und Statik, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Universität der Bundeswehr München (2000)
- [17] Drucker D.C.: *A Definition of Stable Inelastic Material*. Journal of Applied Mechanics 26 (1959), S.101-106
- [18] Dugdale J.S.: *Entropy and its Physical Meaning*. London: Taylor&Francis (1996)
- [19] Emmerling F.A., Heinen A.H.: *Kontinuumsmechanik in tensorieller Darstellung*. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Gebiet Technische Mechanik und Flächentragwerke, Universität der Bundeswehr München (1993)
- [20] Eslami M.R., Shakeri M., Sedaghati R.: *Coupled Thermoelasticity of an Axially Symmetric Cylindrical Shell*. Journal of Thermal Stresses 17 (1994), S.115-135
- [21] Eslami M.R., Ziaei A.R., Ghorbanpour A.: *Thermoelastic Buckling of Thin Cylindrical Shells Based on Improved Stability Equations*. Journal of Thermal Stresses 19 (1996), S.299-315
- [22] *EUROCODE 1, Grundlagen der Tragwerksplanung und Einwirkungen auf Tragwerke*. Teil 2-5: Einwirkungen auf Tragwerke - Temperatureinwirkungen, Deutsche Fassung ENV 1991-2-5 : 1997
- [23] Glaser S.: *Berechnung gekoppelter thermomechanischer Prozesse*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag (1992)
- [24] Hampe E.: *Flüssigkeitsbehälter*. Band 2 - Bauwerke. Berlin/München: Wilhelm Ernst & Söhne (1982)
- [25] Haupt P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag (2000)
- [26] Heinen A.H.: *Dynamische Grundgleichungen und kinetische Instabilität dünner, elastischer Schalenträgerwerke unter Einbeziehung der thermodynamischen Hauptsätze*. Habilitationsschrift vom Fachbereich Bautechnik der Universität - Gesamthochschule - Wuppertal (1983)
- [27] Heinen A.H.: *Interne Arbeitsunterlagen zur Stabilitäts- und Schalentheorie am Institut für Mechanik und Statik*. Universität der Bundeswehr München

- [28] Heinen A.H., Büllesbach J.: *Kinetische Stabilität gerader Stäbe - Theorie und Beispiele*. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Gebiet Technische Mechanik und Flächentragwerke, Universität der Bundeswehr München (1993)
- [29] Heldenfels R.R., Vosteen L.F.: *Approximate Analysis of Effects of Large Deflections and Initial Twist on Torsion Stiffness of a Cantilever Plate Subjected to Thermal Stress*. NACA TR 1361 (1958)
- [30] Hering E., Martin R., Stöhr M.: *Physik für Ingenieure*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag (1990)
- [31] Hrsg. Hetnarski R.B.: *Thermal Stresses Vol.1*. II.Series: Mechanics and mathematical methods. Amsterdam: Elsevier Science Publisher B.V. (1989)
- [32] Hrsg. Hetnarski R.B.: *Thermal Stresses Vol.2*. II.Series: Mechanics and mathematical methods. Amsterdam: Elsevier Science Publisher B.V. (1989)
- [33] Hrsg. Hetnarski R.B.: *Thermal Stresses Vol.3*. II.Series: Mechanics and mathematical methods. Amsterdam: Elsevier Science Publisher B.V. (1989)
- [34] Hrsg. Wetzell O.W.: *Wendehorst Bautechnische Zahlentafeln*. Stuttgart/Beuth/Berlin/Wien/Zürich: B.G. Teubner (1996)
- [35] Iesan D., Scalia A.: *Thermoelastic Deformations*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher (1996)
- [36] Inan, E.: *Coupled Theory of Thermoelastic Plates*. Acta Mechanica 14 (1972), S.1-29
- [37] Ismar H., Mahrenholtz O.: *Technische Plastomechanik*. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr.Vieweg& Sohn (1979)
- [38] Jadeja N.D., Ta-Cheng Loo: *Heat Induced Vibration of a Rectangular Plate*. Journal of Engineering for Industry (1974), S.1015-1021
- [39] Jones R., Mazumdar J.: *Vibration and Buckling of Plates at Elevated Temperatures*. Int. J. Solids Structures 16 (1980), S.61-70
- [40] Kestin J.: *Metal Plasticity as a Problem in Thermodynamics*. Thermomechanical Couplings in Solids, IUTAM (1986)
- [41] Heinen A.H., Klinger R., Büllesbach J.: *Kinetische Stabilitätsuntersuchung für Platten unter zeitveränderlicher Belastung*. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Gebiet Technische Mechanik und Flächentragwerke, Universität der Bundeswehr München (1997)
- [42] Krätzig W.B.: *Einführung in die Thermodynamik der Deformationen I*. Seminar über Thermodynamik und Kontinuumsmechanik, Seminarberichte des Lehrstuhls für Baumechanik der Technischen Universität Hannover, Bericht-Nr. 73 - S 1 (1973)
- [43] Kuchling H.: *Taschenbuch der Physik*. Thun und Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch (1991)

- [44] Lehmann Th.: *Einige Betrachtungen zur Thermodynamik großer elasto-plastischer Formänderungen*. Acta Mechanica 20 (1974), S.187-207
- [45] Lehmann Th.: *Thermo-Mechanical Coupling in Large Deformations Particularly in Bifurcation Problems*. Thermomechanical Couplings in Solids, IUTAM (1986)
- [46] Leipholz H.: *Stabilitätstheorie*. Stuttgart: B.G. Teubner (1968)
- [47] Lutz P., Jenisch R., Klopfer H., Freymuth H., Krampf L., Petzold K.: *Lehrbuch der Bauphysik*. Stuttgart/Leipzig: B.G.Teubner (1994)
- [48] Mahayni M.A.: *Thermal Buckling of Shallow Shells*. Int. J. Solids Structures 2 (1966), S.167-180
- [49] Mahler M.: *Analytische Lösung der instationären Temperaturfeldgleichungen für beliebige Randbedingungen bei Berücksichtigung innerer Wärmequellen*. Dissertation, Fachbereich Bautechnik, Bergische Universität GH - Wuppertal (1989)
- [50] Markus S., Greenberg J.B., Stavsky Y.: *Coupled Thermoelastic Theory for Dynamic Stability of Composite Plates*. Journal of Thermal Stresses 18 (1995), S.335-357
- [51] Meyberg K., Vachenauer P.: *Höhere Mathematik 2*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer Verlag (1991)
- [52] *Meyers grosses Taschenlexikon*. Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich: B.I.-Taschenbuchverlag (1999)
- [53] Hrsg. Gerhard Mehlhorn G.: *Der Ingenieurbau, Grundwissen*. Rechnerorientierte Baumechanik. Berlin: Ernst& Sohn (1995)
- [54] Mieke C.: *Zur numerischen Behandlung thermomechanischer Prozesse*. Forschungs- und Seminarbericht aus dem Bereich der Mechanik, Universität Hannover (1988)
- [55] Mieke C.: *Theory of Large-Strain Isotropic Thermoplasticity Based on Metric Transformation Tensors*. Archive of Applied Mechanics 66 (1995), S.413-427
- [56] Nowacki W.: *Thermoelasticity*. Second edition. Oxford/New York/ Toronto/Sydney/Paris/Frankfurt: Pergamon Press (1986)
- [57] Pal M.C.: *Large Amplitude Free Vibration of Circular Plates Subjected to Aerodynamic Heating*. Int. J. Solids Structures 6 (1970), S.301-313
- [58] Parkus H.: *Instationäre Wärmespannungen*. Wien: Springer-Verlag (1959)
- [59] Parkus H.: *Thermoelasticity*. Wien/New York: Springer-Verlag (1976)
- [60] Paulke S., Heinen A.H.: *Temperatur- und Verformungsanalyse von Flächentragwerken bei Beachtung thermomechanischer Kopplungseffekte*. ZAMM 80 (2000) S3, S699-S700
- [61] Paulke S., Heinen A.H.: *Dynamische Stabilitätsanalyse für Platten unter Berücksichtigung thermomechanischer Kopplungseffekte*. ZAMM 81 (2001) S2, S259-S260

- [62] Plaschko P., Brod K.: *Nichtlineare Dynamik, Bifurkation und Chaotische System.* Lehrbuch Angewandte Mathematik. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn (1995)
- [63] Riemer M., Wauer J., Wedig W.: *Mathematische Methoden der Technischen Mechanik.* Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag (1993)
- [64] Riemer M.: *Technische Kontinuumsmechanik.* Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich: B.I.-Wissenschaftsverlag (1993)
- [65] Schmutzer E.: *Grundlagen der theoretischen Physik.* Teil I. Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich: B.I.-Wissenschaftsverlag (1989)
- [66] Schneider W., Haas S.: *Repetitorium Thermodynamik.* Wien/München: R. Oldenbourg Verlag (1996)
- [67] Schroeder F.H.: *Die reversiblen und irreversiblen Stoffgleichungen und ihre Begründung durch die Hauptsätze der Thermodynamik.* Seminar über Thermodynamik und Kontinuumsmechanik, Seminarberichte des Lehrstuhls für Baumechanik der Technischen Universität Hannover, Bericht-Nr. 73 - S 1 (1973)
- [68] Schroeder F.H.: *Die Stabilitätsgleichungen der technischen Schalentheorie.* Zeitschrift für Flugwissenschaften 20 (1972), S.430-448
- [69] Schroeder F.H.: *Die kinetische Stabilität elastisch deformierbarer Körper.* Pflüger-Festschrift, Hannover (1977)
- [70] Shariyat M., Eslami M.R.: *Dynamic Buckling and Postbuckling of Imperfect Orthotropic Cylindrical Shells Under Mechanical and Thermal Loads, Based on the Three-Dimensional Theory of Elasticity.* Journal of Applied Mechanics 66 (1999), S.476-484
- [71] Shariyat M., Eslami M.R.: *On Thermal Dynamic Buckling Analysis of Imperfect Laminated Cylindrical Shells.* ZAMM 80 (2000) 3, S.171-182
- [72] Sluzalec A.: *Introduction to Nonlinear Thermomechanics.* Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag (1992)
- [73] Stein E., Barthold F.-J.: *Unterlagen zur Vorlesung Elastizitätstheorie.* Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover (1995)
- [74] Stephan K., Mayinger F.: *Thermodynamik.* Band 1: Einstoffsysteme, Grundlagen und technische Anwendungen. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag (1998)
- [75] Stroud R.C.: *Dynamic Response of Rapidly Heated Plate Elements.* AIAA Journal 9 (1971), S.76-83
- [76] Takeuti Y., Furukawa T.: *Some Considerations on Thermal Shock Problems in a Plate.* Journal of Applied Mechanics 48 (1981), S.113-118
- [77] Tanigawa Y., Takeuti Y.: *Coupled Thermoelastic Problem in Three-Dimensions.* ZAMM 62 (1982), S.221-228

- [78] Takeuti Y., Ishida R., Tanigawa Y.: *On an Axisymmetric Coupled Thermal Stress Problem in a Finite Circular Cylinder*. Transactions of the ASME 50 (1983), S.116-122
- [79] Takeuti Y., Tanigawa Y.: *On a New Method for Axisymmetric Coupled Thermoelastic Problems*. Journal of Thermal Stresses 4 (1981), S.461-478
- [80] Tanigawa Y., Takeuti Y., Osaka and N.Noda, Shizuoka: *On a General Treatment for Coupled Thermal Stress Problems in a Cylindrical Coordinate System*. Ingenieur-Archiv 53 (1983), S.317-327
- [81] *VDI-Richtlinie 3822, Schäden durch thermische Beanspruchungen*. Verein Deutscher Ingenieure, Düsseldorf (1999)
- [82] Weller F.: *Numerische Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg& Sohn (1996)
- [83] Wössner G.: *Aufheiz- und Abkühlvorgänge in Platten*. Fortschritt-Berichte der VDI-Zeitschriften, Reihe 6, Nr. 39 (1973)
- [84] Yi Y-B., Du S., Barber J.R., Fash J.W.: *Effect of geometry on thermoelastic instability in disk brakes and clutches*. ASME J.Tribology 121 (1999), S.661-666.
- [85] Ziegler H.: *Plastizität ohne Thermodynamik?*. ZAMP 21 (1970), S.798-805
- [86] Ziegler H.: *An Introduction to Thermomechanics*. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Amsterdam/New York/Oxford: North-Holland Publishing Company (1983)
- [87] Ziegler H.: *Zwei Extremalprinzipien der irreversiblen Thermodynamik*. Ingenieur-Archiv 15 (1961)

Abbildungsverzeichnis

1	Raketenfluegel aus [2] und [16]	12
1.1	Das System und seine Umgebung	18
1.2	Aufspaltung in äußere und innere Systemeigenschaften	20
1.3	Zustandsänderung im 3-dimensionalen thermodynamischen Raum	21
1.4	Zustandsfunktionen	22
1.5	Verschiebung eines Kraftangriffspunktes	30
1.6	Analogiebetrachtung zur Entropie	32
1.7	ein einfacher reversibler Prozess	34
1.8	'Umkehrbarkeit' der Zustandsgröße E_{pot}^{Masse} bei einem reversiblen Prozess	34
1.9	ein einfacher irreversibler Prozess	36
1.10	Beurteilung unterschiedlicher Wärmeströme bezüglich des 2.Hauptsatzes	40
1.11	Gesetz von Fourier - graphische Darstellung	42
1.12	Verlauf der Strömungsgeschwindigkeit und der Temperatur eines strömenden Fluids als Funktion des Wandabstandes y gemäß [4]	43
1.13	Wärmeübergang zwischen zwei parallelen, ebene Flächen.	45
2.1	Kinematik des Kontinuums	48
2.2	Infinitesimale Zustandsänderung ($\mathbf{Mz} \rightarrow \mathbf{Mz}'$) am Volumenelement . .	50
2.3	Wärmezufuhr Volumenelement während Dt	52
2.4	überlagerte Starrkörperbewegung	56
2.5	Verfestigungsmodelle im Hauptspannungsraum (isotherm)	70
3.1	Kirchhoff-Kinematik	79
3.2	Element der Mittelfläche mit Schnitt-, Last- und Trägheitsgrößen	81
4.1	Kinematik des Schalenrandes	104
4.2	geometrische Randbedingungen am Schalenrand	105

4.3	dynamische Randbedingungen am Schalenrand	105
4.4	Einführung von Ersatzkräften am freien Schalenrand	107
4.5	Die während der Zeit Dt einströmenden Wärmemengen an Rande- menten der Laibungsflächen	110
4.6	Die während der Zeit Dt einströmenden Wärmemengen an einem Ran- delement des schiefen Schalenrandes	111
5.1	Gestörte und ungestörte Bewegungsbahn eines materiellen Punktes P auf der Mittelfläche	134
6.1	Chronologischer Ablauf der numerischen Berechnungen	145
6.2	Diskrete Knoten in einem Bereich des Schalenraumes (Darstellung im Schnitt senkrecht zur Mittelfläche)	146
7.1	BB 1: System	150
7.2	BB 1: Ersatzsystem	151
7.3	BB 1: Temperaturänderungen in der Symmetrieebene ($\theta^1 = L/2$) zur Zeit $t = 0.21sec$	155
7.4	BB 1: Temperaturänderung im Mittelpunkt M während $t = 0..0.21sec$.	156
7.5	BB 1: Durchbiegung im Mittelpunkt M während $t = 0..70sec$	156
7.6	BB 2: System	158
7.7	BB 2: Radialverschiebung $v^3(L/2, t)$	161
7.8	BB 2: Radialverschiebung $v^3(\theta^1, t)$ zur Zeit $t = 0.1msec$ und $t = 1msec$	161
7.9	BB 2: Biegemoment $m^{11}(\theta^1, t)$ zur Zeit $t = 0.1msec$ und $t = 1msec$. .	162
7.10	BB 2: Kopplungsbedingte Temperaturerhöhung in der Zylinderwand $T(L/2, \theta^3, t)$ zur Zeit $t = 0.1msec$, $t = 0.5msec$ und $t = 1msec$	163
7.11	BB 2: Kopplungsbedingte Temperaturerhöhung an der inneren Zylin- derwand $T(\theta^1, h/2, t)$ zur Zeit $t = 0.1msec$ und $t = 1msec$	165
7.12	BB 3: System	167
7.13	BB 3: Funktion V_{dyn} für eine Stahlplatte ($h = 0.01$)	169
7.14	BB 3: Beulform	170
7.15	BB 3: Instabilitätsbereiche für $\kappa_{stat} = 0$	174
7.16	BB 3: Instabilitätsbereiche für $\kappa_{stat} = 0.9$	175
7.17	BB 3: Instabilitätsbereiche für $\Omega = 2.43$ - Vergleich mit [50]	176
C.1	graphische Darstellung von $det(\mathbf{L}(\kappa))$	188

C.2	eindimensionale Temperatureigenformen bei Konvektion	189
D.1	Vernetzte Mittelfläche und Finites Element	192
D.2	Zweidimensionale Temperatureigenformen zu dem System in Abbildung 7.2	194
E.1	Ein- und ausströmende Wärmemengen während der Zeit Dt am Tetraed- erelement (Einströmende Wärmemengen in Richtung positiver Koordi- natenlinien θ^k erhalten ein positives Vorzeichen)	196

Tabellenverzeichnis

3.1	thermische Variablen in den konstitutiven Gleichungen	92
4.1	thermische Randbedingungen	112